CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

CADERNO DE ATIVIDADES

FORTALECENDO APRENDIZAGENS

MATEMÁTICA

4º E 5º ANOS

PROFESSOR

CIENTISTA CHEFE
EDUCAÇÃO

PACTO PELA APRENDIZAGEM

MAISPAIC

Volume 1

GOVERNADOR
Camilo Sobreira de Santana

VICE-GOVERNADORA
Maria Izolda Cela de Arruda Coelho

Secretária da Educação	Eliana Nunes Estrela
Secretário Executivo de Cooperação com os Municípios	Márcio Pereira de Brito
Assessora Especial de Gabinete	Ana Gardennya Linard
Coordenadora de Cooperação com os Municípios para Desenvolvimento da Aprendizagem na Idade Certa	Bruna Alves Leão
Articuladora da Coordenadoria de Cooperação com os Municípios para Desenvolvimento da Aprendizagem na Idade Certa	Marília Gaspar Alan e Silva
Equipe da Célula de Fortalecimento da Alfabetização e Ensino Fundamental - Anos Iniciais	Karine Figueredo Gomes (Orientadora) Caniggia Carneiro Pereira (Gerente - 4º e 5º) Rakell Leiry Cunha Brito (Gerente - 1º ao 3º)
Leitura Crítica	Tábita Viana Cavalcante Miranda
Revisão Gramatical	Cíntia Rodrigues Araújo Coelho
Equipe Programa Cientista Chefe em Educação Básica	Jorge Herbert Soares de Lira (Coordenador)
Elaboração e revisão de texto	Antonio Caminha M. Neto Bruno Holanda Emiliano Augusto Chagas Fabrício Siqueira Benevides Fernando Pimentel Jorge Herbert Soares de Lira Samuel Barbosa Feitosa Ulisses Parente

Sumário

CIENTISTA CHEFE EDUCAÇÃO

FUNCAP

MAISPAIC

PACTO PELA APRENDIZAGEM

1 Apresentação do Material

Caro(a) professor(a), continuamos, em 2022, com este caderno, nossa colaboração com você e sua escola para, juntos, recuperarmos e fortalecermos o aprendizado de Matemática das crianças e jovens no ensino básico em nosso estado e municípios. A avaliação de impacto da pandemia, realizada no fim do primeiro semestre de 2021, gerou evidências sobre quais conhecimentos e habilidades matemáticas estão mais fragilizadas entre alunos do quinto ano e do nono ano. Uma análise minuciosa dos dados, tanto estatística quanto pedagógica, revela que a Aritmética dos Números Naturais está na base de tópicos e técnicas que devemos consolidar inicialmente. Ou seja, fortalecendo e construindo *novos significados e abordagens* para a Aritmética, teremos fundações firmes para a ampliação do repertório matemático e o desenvolvimento cognitivo de nossos alunos.

Utilizando este caderno, você pode planejar e executar vários percursos curriculares: o tempo e a profundidade com os quais você trabalhará cada tema devem ser ajustados a cada aula. Sugerimos que seu planejamento leve em conta o desempenho dos alunos nos exercícios sugeridos ao fim de cada seção. Ao longo do texto, indicamos *sequências de tarefas* que podem ser usadas em *avaliações formativas*: nessas avaliações, é importante que você não apenas corrija tarefas em termos de "certo" ou "errado", mas reconheça as razões dos eventuais erros e identifique os pontos em que o aluno tem avanços e outros em que ele(a) ainda necessita de reforços. Em resumo, torna-se fundamental dar ao aluno não apenas uma nota, mas uma *devolutiva* completa, acompanhada, se possível, de um roteiro de estudos específico, tendo em conta os tópicos em que ele apresente dificuldades.

Resumamos, agora, os conteúdos e habilidades trabalhadas neste material. Aprofundando o estudo da Aritmética, após abordar o **sistema posicional decimal** e as operações de **adição** e **subtração**, avançamos, neste volume, no trabalho com a **multiplicação** e **divisão** de números naturais. Reafirmamos, em nossa abordagem, o propósito inicial de que o aluno deva, com as rotinas pedagógicas, ampliar sua *compreensão* e aprimorar a *utilização* dos **algoritmos das operações aritméticas**, especialmente da multiplicação e divisão. Apresentamos, detalhadamente, alguns procedimentos para a **multiplicação** e **divisão** de números naturais, esta última considerada também no caso com restos. Algoritmos que, muitas vezes, usamos de modo irrefletido, como se fossem regras arbitrárias, são explicados e tornados *naturais* e, portanto, mais aceitáveis: a compreensão profunda desses procedimentos é necessária para que o aluno desenvolva as habilidades aritméticas definidas no DCRC. Procedimentos como os representados na forma

$$\begin{array}{r} 1\,6 \\ \times\ 2\,4 \\ \hline 6\,4 \\ 3\,2 \\ \hline 3\,8\,4 \end{array}$$

podem ser plenamente justificados recorrendo-se à representação decimal dos números naturais e às propriedades operatórias, como em

$$\begin{aligned} 16\times 24 &= (10+6)\times(20+4) \\ &= 10\times 20 + 6\times 20 + 10\times 4 + 6\times 4 \\ &= 200 + 120 + 40 + 24 \\ &= 320 + 64 \\ &= 384. \end{aligned}$$

Por outro lado, a própria decomposição decimal dos números naturais envolve adições e multiplicações como em

$$384 = 3\times 100 + 8\times 10 + 4.$$

Da mesma forma, o algoritmo euclidiano da divisão é explicado via exemplos bastante detalhados nos quais fica claro que este algoritmo inverte a ordem dos passos no algoritmo da multiplicação. Enfatizamos, além disso, o papel das estimativas e arredondamentos para tornar o algoritmo da divisão *mais eficiente*. A este propósito, observe que, na divisão 384 : 16, poderíamos começar o algoritmo por

$$384 = 160 + 224 = 16 \times 10 + 224,$$

prosseguindo com

$$\begin{aligned} 384 &= 160 + 224 \\ &= 16 \times 10 + 224 \\ &= 16 \times 10 + 160 + 64 \\ &= 16 \times 10 + 16 \times 10 + 16 \times 4 \\ &= 16 \times 24. \end{aligned}$$

No entanto, *otimizamos* o **número de passos** do algoritmo quando melhoramos nossa estimativa inicial para o quociente, substituindo 160 por 320 como em

$$\begin{aligned} 384 &= 320 + 64 \\ &= 16 \times 20 + 16 \times 4 \\ &= 16 \times 24. \end{aligned}$$

Usando o algoritmo desse segundo modo, percebemos que as parcelas 320 e 64 no primeiro passo são exatamente as parcelas que aparecem na multiplicação de 16 por 24 descrita acima.

Esses são exemplos de um dos objetivos de aprendizagem, premissas deste caderno, a saber, o desenvolvimento do senso numérico no aluno, em particular da compreensão de que são as propriedades das operações aritméticas que dão validade a diferentes algoritmos, não apenas aos mais conhecidos, mas a outros modos de efetuar os cálculos que o próprio aluno possa desenvolver. É preciso ter à mão diversos algoritmos para contextos e problemas diferentes, parte da ideia da **flexibilidade numérica**. Retomando o exemplo acima, trata-se de instigar e orientar o aprendiz a buscar rotas alternativas para executar os cálculos aritméticos, como em

$$16 \times 24 = 2 \times 8 \times 3 \times 8 = 6 \times 64 = 360 + 24 = 384.$$

Portanto, este material dá ênfase à relação entre os algoritmos de multiplicação e o algoritmo euclidiano da divisão: em particular, vemos como o "método da chave" é explicado em termos do uso inteligente de **estimativas** de produtos (e do emprego das tábuas de multiplicação, portanto). Discutimos, ainda, as noções de múltiplos e divisores, inclusive com representações geométricas de padrões na reta numérica. Pretendemos, desse modo, preparar as bases para o estudo das frações a ser iniciado no caderno escrito para o sexto e sétimo anos. De fato, um entendimento pleno dos conceitos de **múltiplos e divisores comuns** será essencial para vencermos as dificuldades ainda representadas pelo estudo das frações.

Os exercícios ao fim de cada seção são agrupados em conjuntos, ordenados, cada um deles, em um crescendo de complexidade e/ou dificuldade técnica. Alunos com lacunas em conhecimentos mais básicos devem ser expostos, inicialmente, aos conjuntos iniciais de exercícios. Alunos que estejam mais desenvoltos quanto aos fatos e técnicas mais elementares devem ser motivados a fazer as tarefas nas sequências finais. Importante destacar que alguns dos exercícios foram escolhidos para apresentar (ou ilustrar) um certo conceito ou técnica. Recomendamos que você possa apresentar e discutir detalhadamente esses exercícios com os alunos.

Apresentamos, a seguir, um roteiro possível para uso deste caderno ao longo de **oito** semanas. A tabela enumera os objetos de conhecimentos (e suas especificações), as habilidades da BNCC e DCRC, os saberes e habilidades da **Matriz dos Saberes** e, por fim, quais descritores na Matriz de Referência do SAEB estão sendo trabalhados ou que dependem dos assuntos estudados neste material. Segue, então, uma proposta de **rotina pedagógica semanal**.

1.1 – Rotinas pedagógicas e de uso do material

Os temas a serem trabalhados são os **algoritmos da multiplicação e da divisão**. Os conhecimentos e habilidades da BNCC e do DCRC, no quarto ano, correspondentes a essas seções, são:

- EF04MA02 - Mostrar, por decomposição e composição, que todo número natural pode ser escrito por meio de adições e multiplicações por potências de dez, para compreender o sistema de numeração decimal e desenvolver estratégias de cálculo.
- EF04MA04 - Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar as estratégias de cálculo.
- EF04MA05 - Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo.
- EF04MA06 - Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
- EF04MA07 - Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
- EF04MA11 (unidade temática **Álgebra**) - Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
- EF04MA12 (unidade temática **Álgebra**) - Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.
- EF04MA13 (unidade temática **Álgebra**) - Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.
- EF04MA14 (unidade temática **Álgebra**) - Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.
- EF04MA15 (unidade temática **Álgebra**) - Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.

Quanto aos conhecimentos e habilidades da BNCC e DCRC, no quinto ano, correspondentes a essas seções, são:

- EF05MA07 - Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
- EF05MA08 -Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
- EF05MA09 (Combinatória) - Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

Quanto a Matriz dos Saberes, os saberes e habilidades que serão mobilizados com as atividades nessas seções são:

Saber S01: reconhecer e utilizar as propriedades do sistema de numeração posicional decimal

- S01.H8: reconhecer o efeito da posição dos algarismos, especialmente o zero, na representação ou ordem dos números naturais
- S01.H10: compor e decompor números naturais em diversas ordens e agrupamentos, envolvendo, em particular, expansões em potências de dez
- S01.H11: expressar, compor e decompor números naturais em termos de potências com base distintas de dez (sistemas posicionais não-decimais)

- S01.H12: associar números naturais a pontos na reta numérica, determinando a localização de pontos correspondentes aos números
- S01.H13: aproximar, arredondar ou estimar números naturais usando suas expressões no sistema decimal ou suas representações geométricas
- S01.H14: reconhecer e descrever padrões e regularidades (e.g., leis de formação, recursividade ou recorrência) em sequências de números naturais

Saber S02: efetuar operações e resolver problemas envolvendo números naturais e inteiros

- S02.H1: representar a composição e decomposição de números naturais em termos da adição e da multiplicação por potências de dez
- S02.H2: justificar os algoritmos da adição e multiplicação em termos da composição ou decomposição de números naturais no sistema posicional decimal
- S02.H3: descrever as operações de adição e multiplicação com a ajuda de representações simbólicas ou modelos geométricos
- S02.H9: justificar os algoritmos da multiplicação em termos da adição e da decomposição de números inteiros
- S02.H12: utilizar, de modo correto e justificado, procedimentos e algoritmos de multiplicação de números naturais ou inteiros
- S02.H14: utilizar as propriedades das operações de adição e multiplicação (comutatividade, associatividade, distributividade) para efetuar cálculos aritméticos
- S02.H15: efetuar divisões exatas (restos nulos) de números naturais, relacionando essas divisões a multiplicações e seus diversos significados e representações
- S02.H16: determinar parcelas desconhecidas em um cálculo aritmético a partir de parcelas e resultados dados
- S02.H17: reconhecer múltiplos e divisores de um dado número natural, utilizando, em particular, tábuas de multiplicação e critérios de divisibilidade na resolução de problemas
- S02.H18: formular e resolver problemas que envolvam múltiplos e divisores comuns a dois ou mais números inteiros
- S02.H19: identificar fatores primos de números naturais, utilizando-os, em particular, para determinar múltiplos e divisores comuns
- S02.H21: compreender e relacionar os diversos significados e representações da divisão de números naturais (também com restos não nulos), inclusive a noção de congruência
- S02.H22: utilizar procedimentos e algoritmos de divisão, corretos e justificados, em particular o algoritmo de divisão euclidiano (com restos não nulos, inclusive) em suas relações com os algoritmos de adição e multiplicação
- S02.H23: utilizar procedimentos em cálculos envolvendo operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais ou inteiros, em particular suas propriedades e relações
- S02.H24: utilizar, em diferentes contextos e problemas, arredondamentos e estimativas de números naturais ou números inteiros e dos resultados de operações aritméticas entre esses números
- S02.H27: formular e resolver problemas, motivados por diversos contextos e com recurso a diferentes procedimentos, em termos de operações com números naturais (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) e seus vários significados e representações

Os conhecimentos e habilidades da BNCC e DCRC e os saberes e habilidades da Matriz dos Saberes mencionados anteriormente estão diretamente associados aos seguintes descritores na **Matriz de Referência do SAEB para o quinto ano**: D13, D14, D15, D17, D18, D19 e D20 e têm correlação com os descritores D10 e D23 (no contexto de valores e trocas no sistema monetário). Em resumo, os saberes e habilidades (S01.H8, S02.H1, etc.) listados anteriormente devem ser entendidos como **metas de aprendizagem** dos alunos, associadas às habilidades da BNCC e DCRC para o quarto e quinto anos, já mencionadas. Além disso, estabelecem uma base firme para os conhecimentos e habilidades demandados pelo SAEB e pelo SPAECE do quinto ano, especialmente em relação aos descritores enumerados acima. Em seu planejamento curricular para **um mês**, recomendamos o trabalho com este caderno de modo a cobrir estas metas de aprendizagem. Na sequência, sugerimos um roteiro de uso do caderno com essa finalidade.

1.1.1 – Primeira e segunda quinzenas

Na rotina pedagógica, propomos que, na **primeira e segunda quinzenas**, sejam trabalhados os seguintes elementos: com apoio da seção 3.1, devem ser trabalhados modelos, representações, significados e interpretações para a multiplicação de números naturais, explorando, por exemplo, configurações retangulares ou o **princípio multiplicativo** da contagem. O objetivo da seção é justificar o algoritmo da multiplicação a partir do sistema de numeração posicional decimal e das propriedades operatórias (associatividade e distributividade com relação à adição). Essas propriedades são detalhadas na seção 3.2 em que, uma vez mais, o uso de modelos geométricos provê uma visão bastante intuitiva das propriedades fundamentais. Após uma discussão sobre a construção das tábuas de multiplicação na seção 3.3, o tema do sistema posicional decimal é retomado na seção 3.4. Alguns algoritmos alternativos são explorados nesta parte do texto, como é o caso da multiplicação cruzada na seção 3.5. Este conjunto de seções traz uma visão bastante geométrica e intuitiva da multiplicação.

Finalizando a programação das primeiras quinzenas, propomos trabalho detalhado com a seção 3.6, dadas as dificuldades corriqueiras a respeito do algoritmo de divisão e de todos os conceitos decorrentes, tais como as frações, caracterizadas como expressões de restos. Use a seguinte lista de tarefas para seu planejamento da **primeira e segunda quinzenas**. O importante é que cubra os temas tratados, mesmo que não haja oportunidade de passar por *todos* os exercícios. O fundamental é manter registros personalizados dos alunos, informando em quais saberes e habilidades (vide acima a relação de todos eles) estão progredindo ou ainda necessitariam de suporte.

- $1^{\underline{a}}$ e $2^{\underline{a}}$ quinzenas, $1^{\underline{a}}$ a 4 $^{\underline{a}}$ semanas ($1^{\underline{a}}$ a $8^{\underline{a}}$ aulas):
  a) Sequência 1, exercícios 3.2 a 3.13
  b) Sequência 2, exercícios 3.27 a 3.31
  c) Sequência 3, exercícios 3.43 a 3.47
  d) Sequência 4, exercícios 3.54 e 3.55

1.1.2 – Terceira e quarta quinzenas

Nesta segunda quinzena sugerimos que sejam trabalhadas a seção 3.7 bem como o capítulo contendo tarefas de revisão direcionadas aos saberes, habilidades e descritores. A seção 3.7 elabora as noções de múltiplos e divisores comuns, a partir de exemplos, tendo por base a **fatoração** dos números naturais em seus fatores primos. Procedimentos para determinar **máximos divisores comuns** e **mínimos múltiplos comuns** são apresentados, tendo em conta a relevância desses tópicos para o estudo de frações, realizado nos cadernos do sexto e sétimo anos. As duas últimas quinzenas encerrariam com as tarefas de revisão, organizadas em seções associadas a *blocos* de descritores da matriz de referência do SAEB que dependem de conhecimentos e habilidades básicos comuns. Esses conhecimentos e habilidades são enumerados em cada seção de tarefas, em correspondência com os temas tratados neste caderno ou no anterior. Use a seguinte lista de tarefas para seu planejamento das duas últimas quinzenas. O importante é que cubra os temas tratados, mesmo que não haja oportunidade de passar por *todos* os exercícios. O fundamental é manter registros personalizados dos alunos, informando em quais saberes e habilidades (vide acima a relação de todos eles) estão progredindo ou ainda necessitariam de suporte.

- $2^{\underline{a}}$ e $3^{\underline{a}}$ quinzenas, $6^{\underline{a}}$ a $8^{\underline{a}}$ semanas ($9^{\underline{a}}$ a $16^{\underline{a}}$ aulas):
  a) Sequência 1, exercícios 3.14 a 3.26
  b) Sequência 2, exercícios 3.32 a 3.42
  c) Sequência 3, exercícios 3.48 a 3.53
  d) Sequência 4, exercícios 3.56 e 3.61

2 Números Naturais: representação, adição e subtração

2.1 – Representações dos números naturais

Levantar os dedos para contar, todos nós já fizemos isso. Em muitas culturas, o uso de partes do corpo para contar determina a maneira como representamos quantidades e números. Perceba que não conseguimos trabalhar com números grandes utilizando apenas os dedos. A figura seguinte demonstra como os oksapmin se "viravam" para contar números maiores que 20. Veja:

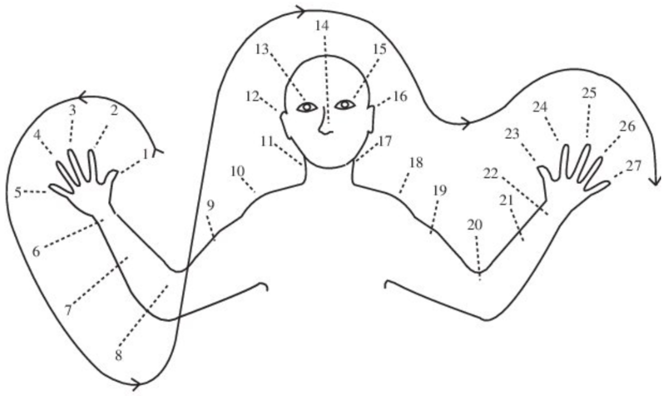


Figura 2.1: Contando como os Oksapmim. Imagem de Geoffrey Saxe retirada do ResearchGate

Portanto, para que possamos contar e representar números maiores do que dez, é preciso utilizar outra estratégia. Você já deve ter visto diversos números na sua vida, grandes ou pequenos, representados de alguma maneira. Por exemplo, a população mundial no momento em que escrevemos esse texto é igual a

$$7\,792\,864\,557 \tag{2.1}$$

pessoas, de acordo com o *World Population Clock* no *site* `https://www.census.gov/popclock/`

Percebam que, neste número, usamos os **algarismos decimais** 2, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Vejam, além disso, que o algarismo 7 aparece mais de uma vez no número: na primeira, segunda e última posições, da esquerda para a direita. Na primeira posição, o algarismo 7 representa 7 *bilhões*, na segunda representa 7 *milhões* e, na última, 7 *unidades*, ou seja, 7 pessoas. Vejamos como ler esse número. Para isso, podemos decompô-lo em **classes**, da seguinte forma

$$7 \text{ bilhões } + 792 \text{ milhões } + 864 \text{ milhares } + 557 \text{ unidades.} \tag{2.2}$$

Note que o sinal + indica que estamos decompondo o número total em partes ou parcelas. Por sua, a parcela 792 milhões, na **classe dos milhões**, pode ser decomposta em suas **ordens** da seguinte forma

$$792 \text{ milhões } = 7 \text{ centenas de milhão } + 9 \text{ dezenas de milhão } + 2 \text{ unidades de milhão.} \tag{2.3}$$

Da mesma forma, a parcela 844 milhares, na classe dos milhares, pode ser decomposta nas ordens

$$864 \text{ milhares } = 8 \text{ centenas de milhar } + 6 \text{ dezenas de milhar } + 4 \text{ unidades de milhar} \tag{2.4}$$

e, por fim, parcela 557 unidades, na classe das unidades, é decomposta como

$$557 \text{ unidades } = 5 \text{ centenas } + 5 \text{ dezenas } + 7 \text{ unidades.} \tag{2.5}$$

Note que o algarismo 5 aparece duas vezes no número: na posição mais à esquerda, representa 5 centenas; na posição mais à direita, 5 dezenas. Podemos representar essa decomposição em uma tabela como a que segue:

Unidades de bilhão	Centenas de milhão	Dezenas de milhão	Unidades de milhão	Centenas de milhar	Dezenas de milhar	Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades
7	7	9	2	8	6	4	5	5	7

Este exemplo demonstra como é possível usar apenas poucos símbolos, os algarismos decimais ou hindu-arábicos

Figura 2.2: Image by OpenClipart-Vectors from Pixabay

para representar **qualquer** quantidade, por maior que seja. A ideia genial, uma das maiores descobertas humanas, é a de que um mesmo algarismo representa valores **10 vezes maior** para cada posição que "avança" para a esquerda em um número. O algarismo 0 tem um papel muito especial pois indica *classes* e *ordens* que ficam "vagas" quando avançamos um algarismo à esquerda ou o recuamos para a direita. O quadro a seguir explica, com mais detalhes, o papel do 0 no sistema posicional.

O número 10 é o **sucessor** do número 9, ou seja, $10 = 9 + 1$. "Movendo" o algarismo 1 da ordem das dezenas para a ordem das centenas, temos

$$100$$

Note que a posição "vaga" deixada pelo 1 foi ocupada com um algarismo 0. Com esse movimento, o algarismo 1 passa a representar uma centena. Movendo esse algarismo uma vez mais para a esquerda, temos

$$1000$$

Agora, o algarismo 1 passa a representar um milhar. As posições vagas vão sendo ocupadas por algarismos 0. Vejamos o padrão que pode ser formado assim:

$$\begin{aligned}
10 &= 1 \text{ dezena,}\\
100 &= 1 \text{ centena ou } 10 \text{ dezenas,}\\
1\,000 &= 1 \text{ milhar ou } 10 \text{ centenas ou } 100 \text{ dezenas,}\\
10\,000 &= 1 \text{ dezena de milhar ou } 10 \text{ milhares ou } 100 \text{ dezenas ou } 1000 \text{ dezenas,}\\
100\,000 &= 1 \text{ centena de milhar ou } 10 \text{ dezenas de milhar ou } 100 \text{ unidades de milhar ou } 1000 \text{ centenas ou}\\
&\quad 10000 \text{ dezenas,}\\
1\,000\,000 &= 1 \text{ milhão ou } 10 \text{ centenas de milhar ou } 100 \text{ dezenas de milhar ou } 1000 \text{ unidades de milhar ou}\\
&\quad 10000 \text{ centenas ou } 100000 \text{ dezenas,}
\end{aligned}$$

e assim por diante. Vejam que seria difícil prosseguir com esse padrão **infinito** escrevendo os números por extenso e dando nomes a classes cada vez maiores: bilhões, trilhões, quatrilhões, ...

Mais adiante, veremos como resolver esse problema com as **potências de dez**.

Voltando ao nosso exemplo da população mundial, concluímos que 557 pode ser *decomposto* como

$$557 = 500 + 50 + 7,$$

ou seja, 5 centenas, 5 dezenas e 7 unidades, assim como

$$864 \text{ milhares} = 800\,000 + 60\,000 + 4\,000,$$

isto é, 8 centenas de milhar, 6 dezenas de milhar e 4 unidades de milhar. Finalmente,

$$792 \text{ milhões} = 700\,000\,000 + 90\,000\,000 + 2\,000\,000,$$

o que significa, 7 centenas de milhão, 9 dezenas de milhão e 2 unidades de milhão.

Observação 2.1 — Lembrete. O algarismo 0 tem um papel especial no sistema posicional decimal: veja, por exemplo, a diferença entre

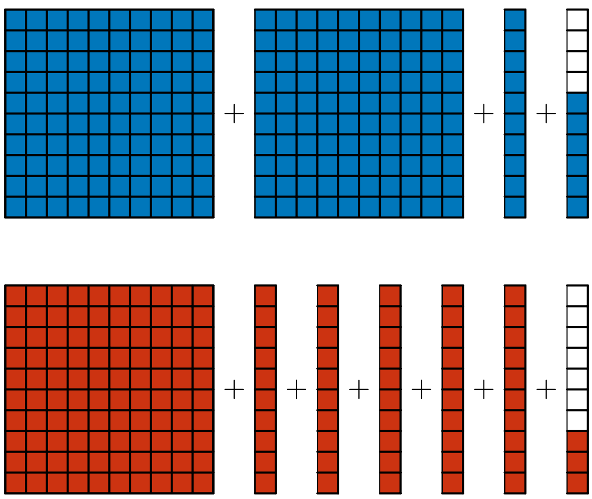
$$\begin{aligned} 1\,003 &= 1\,000 + 3, \\ 1\,030 &= 1\,000 + 30, \\ 1\,300 &= 1\,000 + 300. \end{aligned}$$

Nota ao(à) professor(a) 2.1 Até este ponto, trabalhamos o fato de que, para expressar quantidades com números *cardinais*, precisamos representá-los usando um conjunto finito de símbolos. Para isso, o mesmo símbolo, o algarismo, expressa quantidades diferentes dependendo de sua posição na representação do número: em nosso caso, *multiplicamos* o valor do algarismo por 10 a cada posição mais à direita que ocupe. Nos exercícios, apresentamos outros sistemas, históricos ou fictícios, para que essa ideia geral fique bem assentada, independentemente dos símbolos específicos que estejamos trabalhando. O professor deve observar que a própria representação decimal dos números já **embute** as operações de adição e multiplicação. Reciprocamente, para o entendimento das operações de adição e multiplicação, o aluno deve ter uma sólida compreensão da *composição* e *decomposição* dos números naturais no sistema posicional decimal. Esse tema voltará a ser explorado na seção 3.4.

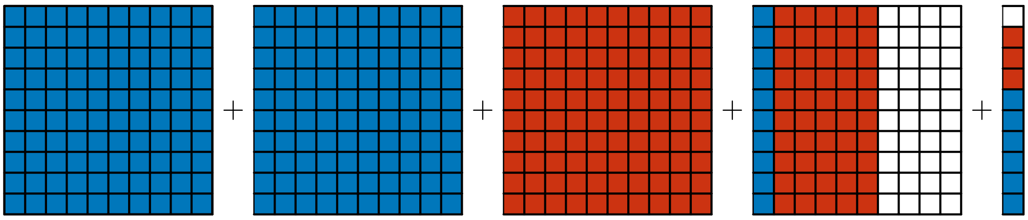
2.2 – Os algoritmos para a adição

Um *algoritmo* é uma sequência finita de instruções, isto é, uma "*receita*" passo a passo, que visa obter uma solução para um problema. Nesta seção do caderno, nosso problema é, simplesmente, calcular a soma de dois números naturais e a receita deve funcionar para quaisquer dois números.

No que segue, vamos descrever o *algoritmo da adição* a partir de alguns exemplos. Iniciamos com a soma $216+153$. Esses números podem ser decompostos em $200+10+6$ e $100+50+3$, como representado na seguinte figura:



Adicionar ou **somar** esses números corresponde a juntar todos os quadradinhos destacados nas figuras anteriores, obtendo:



Obtemos, agrupando os quadradinhos destacados, um total de

$$300 + 60 + 9$$

unidades. Usando o sistema decimal, podemos representar esse cálculo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 216 + 153 &= 200 + 10 + 6 + 100 + 50 + 3 \\ &= 200 + 100 + 10 + 50 + 6 + 3 \\ &= 300 + 60 + 9 \\ &= 369. \end{aligned}$$

Assim, efetuamos a adição “$216 + 153 = 369$” usando a representação decimal das **parcelas**, ou seja, dos números que estão sendo somados. Adicionamos as unidades do primeiro número com as unidades do segundo; as dezenas do primeiro número com as dezenas do segundo e, por fim, as centenas do primeiro número com as centenas do segundo. Podemos representar essas operações do seguinte modo:

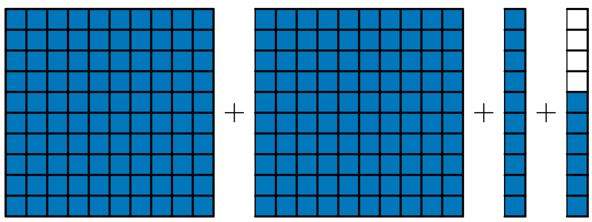
$$\begin{array}{r} 200 + 10 + 6 \\ + \; 100 + 50 + 3 \\ \hline 300 + 60 + 9 \end{array}$$

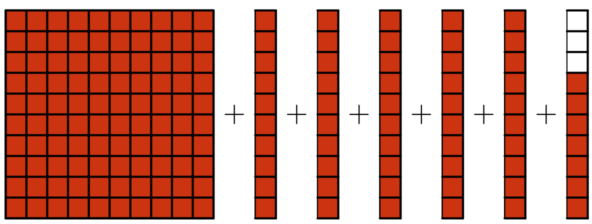
Podemos escrever essa expressão de modo mais sucinto como

$$\begin{array}{rccc} & 2 & 1 & 6 \\ + & 1 & 5 & 3 \\ \hline & 3 & 6 & 9 \end{array}$$

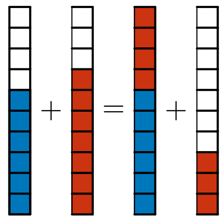
Perceba que nessa forma mais prática de escrever a soma, as **parcelas** estão escritas de modo que seus algarismos nas respectivas ordens estão alinhados: centenas com centenas, dezenas com dezenas, unidades com unidades.

Prosseguindo, calculemos, agora, a soma $216 + 157$. As parcelas, agora, são decompostos como $200 + 10 + 6$ e $100 + 50 + 7$, como representado nas seguintes figuras:

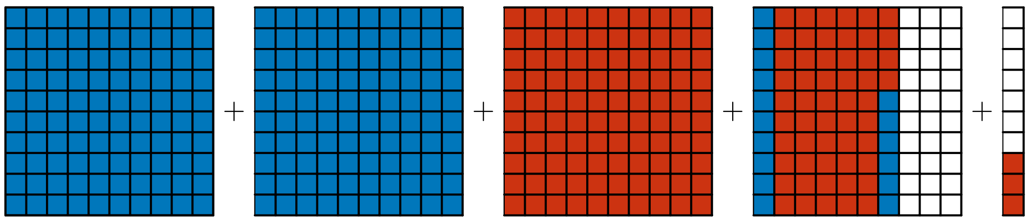




Note que as 6 mais 7 unidades somam 13 unidades, ou seja, 1 dezena e 3 unidades, conforme as seguintes figuras:



Essa soma, portanto, pode ser representada da seguinte forma:



Representamos, agora, esta soma com o uso do sistema decimal, escrevendo

$$\begin{aligned} 216 + 157 &= 200 + 10 + 6 + 100 + 50 + 7 \\ &= 200 + 100 + 10 + 50 + 6 + 7 \\ &= 200 + 100 + 10 + 50 + 13 \\ &= 200 + 100 + 10 + 50 + 10 + 3 \\ &= 300 + 70 + 3 \\ &= 373. \end{aligned}$$

Na segunda linha, somamos as 6 unidades e as 7 unidades, obtendo 13 unidades. Na quarta linha, escrevemos 13 como $10 + 3$, ou seja, 1 dezena e 3 unidades. Na quinta linha, somamos essa dezena às $1 + 5 = 6$ dezenas que já tínhamos, obtendo 7 dezenas. Portanto, a soma é dada por 3 centenas, 7 dezenas e 3 unidades. Podemos "armar" essas contas da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} 200 + 10 + 6 \\ + \; 100 + 50 + 7 \\ \hline 300 + 60 + 3 \\ + \qquad\quad 10 \qquad \\ \hline 300 + 70 + 3 \end{array}$$

Na primeira linha, temos a decomposição $216 = 200 + 10 + 6$. Na segunda linha, a decomposição $157 = 100 + 50 + 7$. Somamos 200 e 100, somamos 10 e 50 e somamos 6 e 7. Na terceira e quarta linhas, temos o resultado dessas somas:

$$300 + 60 + 13 = 300 + 60 + 10 + 3 = 300 + 70 + 3 = 373.$$

Veja que decompomos o 13 em $10 + 3$, obtendo 1 dezena e 3 unidades. Reescrevendo essa conta com um *dispositivo prático*, temos

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 2\;1\;6 \\ +\,1\;5\;7 \\ \hline 3\;7\;3 \end{array}$$

O algarismo 1 que aparece na primeira linha representa as 10 unidades (ou 1 dezena) que obtemos quando somamos $6 + 7 = 13$ e escrevemos o resultado 13 como $10 + 3$. Fica, assim, explicado o que as pessoas, comumente, chamam de "vai um" no cálculo da adição. Para esclarecer isso, estudaremos mais um exemplo: desta vez, vamos calcular a soma $216 + 187$. Usando as decomposições decimais dessas parcelas, temos

$$\begin{aligned} 296+157 &= 200+90+6+100+50+7 \\ &= 200+100+90+50+\underbrace{6+7}_{=13=10+3} \\ &= 200+100+90+50+13 \\ &= 200+100+\underbrace{90+50}_{=140=100+40}+10+3 \\ &= 200+100+140+10+3 \\ &= 300+150+3 \\ &= 300+100+50+3 \\ &= 453. \end{aligned}$$

Armando estas contas como fizemos da vez passada, obtemos

$$\begin{array}{rl} & 200+90+6 \\ + & 100+50+7 \\ \hline & 300+40+3 \\ + & 100+10 \\ \hline & 400+50+3 \end{array}$$

Na primeira linha, temos a decomposição $296 = 200+90+6$. Na segunda linha, a decomposição $157 = 100+50+7$. Somamos 200 e 100, somamos 90 e 50 e somamos 6 e 7. Na terceira e na quarta linhas, temos o resultado dessas somas.

$$300+140+13 = 300+100+40+10+3 = 400+50+3 = 453.$$

Veja que decompusemos o 13 em $10+3$, obtendo 1 dezena e 3 unidades. Da mesma forma, decompusemos o 140 em $100+40$, obtendo 1 centena e 4 dezenas. Podemos escrever tudo isso de modo bem mais sucinto, observe:

$$\begin{array}{rccc} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ & 2 & 9 & 6 \\ + & 1 & 5 & 7 \\ \hline & 4 & 5 & 3 \end{array}$$

Na primeira linha, o primeiro algarismo 1, à esquerda, representa a 1 centena que temos ao decompor $150 = 100+40+10$. O segundo algarismo 1 representa a dezena que obtemos quando decompomos $13 = 10+3$. Isso justifica por que "vai um" da ordem das dezenas para a ordem das centenas e porque "vai um" da ordem das unidades para a ordem das dezenas!

Nota ao(à) professor(a) 2.2 Sugerimos, a fim de explorar os conceitos e desenvolver a práticas da adição e da composição e decomposição dos números naturais, o(a) professor(a) possa organizar atividades com o uso do ábaco ou do *soroban*, como torneios numéricos.

Nota ao(à) professor(a) 2.3 Além do ábaco ou do *soroban*, recomendamos o uso de modelos geométricos e físicos para ilustrar a adição e suas propriedades fundamentais.

Problema 1 Quanto é $9+99+999$?

Vamos resolver esse problema de três modos. Calculamos, segundo a **adição com reagrupamento** ou **adição com reserva** (o popular "vai um"),

$$\begin{array}{rcccc} & & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 2} & \\ & & 9 & 9 & 9 \\ & & & 9 & 9 \\ + & & & & 9 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 7 \end{array}$$

CIENTISTA CHEFE EDUCAÇÃO FUNCAP MAISPAIC PACTO PELA APRENDIZAGEM

Quando efetuamos a soma dessa maneira, começamos somando os números na ordem das unidades, obtendo $9+9+9=27=20+7$. Assim, "fica" o 7 na ordem das unidades e "vai" o 2 para a ordem das dezenas. De fato, o algarismo 2, representado como o primeiro algarismo da direita para a esquerda na primeira linha, corresponde a 20 unidades ou 2 *dezenas*. Agora, somando os números na ordem das dezenas, temos $20+90+90=200$, obtendo 2 *centenas*. Logo, "fica" o 0 na ordem das dezenas e "vai" o 2 para a ordem das centenas. Na sequência, somamos os números na ordem das centenas, obtendo $200+900=1\,100$, ou seja, 1 unidade de milhar e 1 centena. O número resultante é 1 107.

Neste exercício, também é possível decompormos as *parcelas* da soma como

$$\begin{aligned} 999 &= 900+90+9 \\ 99 &= 90+9 \\ 9 &= 9. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 999+99+9 &= 900+90+9+90+9+9 \\ &= 900+90+90+\underbrace{9+9+9}_{20+7} \\ &= 900+90+90+20+7 \\ &= 900+\underbrace{90+90+20}_{200}+7 \\ &= \underbrace{900+200}_{1\,000+100}+7 \\ &= 1\,000+100+7 \\ &= 1\,107. \end{aligned}$$

Nessa sequência de operações, justificamos o uso do algoritmo da **adição com reagrupamento**: o algarismo 2 que "vai" para a ordem das dezenas e o algarismo 2 que "vai" para a ordem das centenas.

Apresentamos, agora, uma solução mais rápida, usando **subtrações**. Perceba que

$$\begin{aligned} 9+1 &= 10, \\ 99+1 &= 100, \\ 999+1 &= 1\,000. \end{aligned}$$

Somando as parcelas dos lados esquerdos, as parcelas dos lados direitos e *reagrupando* os termos, temos

$$999+99+9+1+1+1=1\,000+100+10.$$

Logo,

$$999+99+9+3=1\,110.$$

Subtraindo 3 dos dois lados da igualdade, obtemos:

$$999+99+9=1\,110-3=1\,107.$$

Essa solução do problema dá uma ideia sobre a importância de usarmos as **propriedades operatórias** da adição, como a *comutatividade* e a *associatividade*. A comutatividade implica que as somas $1+99$ e $99+1$ são iguais, ou seja, que a mudança da ordem das parcelas, da esquerda para a direita, não altera a soma. Já a associatividade assegura que obtemos a mesma soma se

- somarmos as parcelas $999+99$ e, em seguida, somarmos 1 ao resultado, isto é, se fizermos os cálculos na ordem $(999+99)+1$,
- ou se somarmos $99+1$ primeiro e, após, somarmos 999 ao resultado, isto é, se fizemos os cálculos na ordem $999+(99+1)$.

Daqui por diante, as operações entre parênteses serão efetuadas primeiro. De fato, temos uma *convenção* na Matemática para indicar a ordem em que as operações são efetuadas, como veremos adiante. O que a associatividade diz é que a ordem em que efetuamos as adições **não afeta** o resultado. No entanto, a *escolha* de uma certa ordem pode *simplificar* as contas!

Logo, usando a comutatividade e a associatividade, temos

$$999 + 1 + 99 = 999 + (99 + 1) = 999 + 100 = 1\,099,$$

ou, ainda,

$$999 + 1 + 99 = (999 + 1) + 99 = 1\,000 + 99 = 1\,099.$$

Esses são exemplos simples de como podemos usar essas propriedades até para calcular somas **sem lápis e papel** (e sem calculadora).

2.3 – Os algoritmos para subtração

Em uma subtração, um certo número (o *subtraendo*) é retirado de um número maior (o *minuendo*), deixando um *resto* ou *diferença*:

$$\text{minuendo} - \text{subtraendo} = \text{resto ou diferença}.$$

A seguir, usamos alguns exemplos para recordar os dois algoritmos mais comuns para subtrações. Calculamos, como nosso primeiro exemplo, a diferença $369 - 153$:

$$\begin{aligned} 369 - 153 &= 300 + 60 + 9 - (100 + 50 + 3) \\ &= 300 + 60 + 9 - 100 - 50 - 3 \\ &= 300 - 100 + 60 - 50 + 9 - 3 \\ &= 200 + 10 + 6 \\ &= 216. \end{aligned}$$

Observe que

$$\text{diferença} + \text{subtraendo} = \text{minuendo}.$$

Em nosso exemplo, temos

$$216 + 153 = 200 + 10 + 6 + 100 + 50 + 3 = 300 + 60 + 9 = 369.$$

Essas manipulações podem ser organizadas de modo mais simples com o seguinte *dispositivo prático* para a subtração:

$$\begin{array}{r} 3\ 6\ 9 \\ -\ 1\ 5\ 3 \\ \hline 2\ 1\ 6 \end{array}$$

Observe que, na prática, subtraímos 3 unidades das 9 unidades, 5 dezena das 6 dezenas e 1 centena das 3 centenas, ficando com a diferença ou resto de 6 unidades, 1 dezena e 2 centenas, ou seja, 62+10+200=216.

Caso a diferença fosse $373 - 157$, teríamos o mesmo resultado, já que acrescentaríamos 4 unidades ao minuendo (373=369+4) e também 4 unidades ao subtraendo (157=153+4). Vejamos, todavia, como obter esse resultado de outros modos. Para começar, usamos a técnica de **reagrupamento** ou **decomposição**. Vejamos

$$\begin{aligned} 373 - 157 &= 300 + 70 - 3 - (100 + 50 + 7) \\ &= 300 + 70 + 3 - 100 - 50 - 7 \\ &= 300 + 60 + 10 + 3 - 100 - 50 - 7 \\ &= 300 - 100 + 60 - 50 + 13 - 7 \\ &= 200 + 10 + 6 \\ &= 216. \end{aligned}$$

Podemos apresentar essas contas "armando" os cálculos no seguinte dispositivo:

$$\begin{array}{rr} & 300+70+3 \\ - & 100+50+7 \\ \hline & 200+20+13 \\ - & 10+7 \\ \hline & 200+10+6 \end{array}$$

De modo mais sucinto, escrevemos

$$\begin{array}{rccc} & & 6 & 13 \\ & 3 & \cancel{7} & \cancel{3} \\ - & 1 & 5 & 7 \\ \hline & 2 & 1 & 6 \end{array}$$

Usualmente, as pessoas se referem a esse algoritmo como equivalente a "tomar emprestado": a dezena que "tomamos emprestado", de fato, está na decomposição do minuendo 373. Com esta decomposição de $300 = 300 + 70 + 3$ em $300 + 60 + 13$ (reagrupamento de 1 dezena como 10 unidades na coluna das unidades). Outra maneira de fazer a subtração acima é *por composição*, como descrevemos agora. Temos

$$\begin{aligned} 373 - 157 &= 300 + 70 - 3 - (100 + 50 + 7) \\ &= 300 + 70 + 10 + 3 - 100 - 50 - 10 - 7 \\ &= 300 + 70 + 13 - 100 - 60 - 7 \\ &= 300 - 100 + 70 - 60 + 6 \\ &= 200 + 10 + 6 \\ &= 216. \end{aligned}$$

Reescrevendo as contas no dispositivo prático, obtemos:

$$\begin{array}{r} 3\ 7\,{}^{1}3 \\ -\ 1\,{}^{1}5\ 7 \\ \hline 2\ 1\ 6 \end{array}$$

No dispositivo acima, somamos 10 unidades ao minuendo e também 10 unidades ao subtraendo, o que não altera o resultado da subtração. Desse modo, o minuendo passar a ter 13 unidades em vez de apenas 3. Do mesmo modo, o subtraendo passa a ter 6 dezenas em vez das 5 iniciais. Subtraímos, enfim, 7 unidades das 13, 6 dezenas das 7 e 1 centena das 3 centenas, obtendo $6 + 10 + 200 = 216$ unidades.

Finalizamos a seção com dois probleminhas, para fixarmos e, ao mesmo tempo, aplicarmos esses conceitos e técnicas da subtração.

Problema 2 Quanto dinheiro falta a João para comprar uma motoneta no valor de R$ 10 590,00, sabendo que ele já conseguiu poupar R$ 6 380,00?

Solução. O problema consiste em *resolver* a seguinte situação

$$6\,380 + \text{ quantia que falta} = 10\,590.$$

Para encontrar a quantia que falta, calculamos a *diferença*

$$10\,590 - 6\,380$$

entre o valor da motoneta e a quantia que João tem atualmente. Decompondo as parcelas e reagrupando os componentes, calculamos

$$\begin{aligned} 10\,590 - 6\,380 &= 10\,000 + 500 + 90 - 6.000 - 300 - 80 \\ &= 10\,000 - 6\,000 + 500 - 300 + 90 - 80 \\ &= 4\,000 + 200 + 10 \\ &= 4\,210. \end{aligned}$$

Em uma subtração, um certo número (o *subtraendo*) é retirado de um número maior (o *minuendo*), deixando um *resto* ou *diferença*:

$$\text{minuendo} - \text{subtraendo} = \text{resto ou diferença}.$$

Para visualizar e organizar melhor essas manipulações, as escrevemos da seguinte forma, que vemos na escola:

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 5 & 9 & 0 \\ - & & 6 & 3 & 8 & 0 \\ \hline & & 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Observe que, somando a quantia que falta ao que João já poupou, obtemos a quantia total desejada, ou seja, o valor da motoneta, isto é,

$$6\,380 + 4\,210 = 10\,590,$$

ou seja

$$\text{subtraendo} + \text{resto ou diferença} = \text{minuendo}.$$

Nesse exemplo, subtraímos unidades das unidades, dezenas das dezenas, centenas das centenas, e assim por diante. ■

Problema 3 Para pagar uma reforma urgente em casa, João gastou R$ 1 190,00 de sua poupança de R$ 6 380,00. Com quanto ficou?

Solução. Aqui temos uma situação diferente: para resolver esse problema, precisamos *subtrair* ou retirar 1 190 reais dos 6 380 reais que João já poupara, isto é,

$$6\,380 - 1\,190,$$

obtendo o valor que *resta* na poupança de João após essas despesas com a reforma. “Armando” a conta como aprendemos na escola, temos:

$$\begin{array}{rcccc} & & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 18} & \\ & 6 & \cancel{3} & \cancel{8} & 0 \\ - & 1 & 1 & 9 & 0 \\ \hline & 5 & 1 & 9 & 0 \end{array}$$

■

2.4 – Exercícios resolvidos e propostos

Exercício 2.1 Calcule as seguintes somas:

- $785 - 273$
- $785 - 276$
- $805 - 541$
- $805 - 547$
- $1\,005 - 768$

Solução. Utilizemos as propriedades da adição e subtração para fazermos os cálculos.

- $785 - 273 = 700 + 80 + 5 - 200 - 70 - 3 = 700 - 200 + 80 - 70 + 5 - 3 = 500 + 10 + 2 = 512.$

- $785-276 = 700+80+5-200-70-6 = 700+70+10+5-200-70-6 = 700-200+70-70+15-6 = 500+9$. Note que decompusemos $80 = 70+10$ para **reagrupar** essas 10 unidades junto às 5 unidades que já tínhamos e, assim, podermos subtrair as 9 unidades. Esse reagrupamento (ou “reserva”) pode ser visualizado no seguinte *dispositivo prático*

$$\begin{array}{cccc} & & 7 & 15 \\ & 7 & \cancel{8} & \cancel{5} \\ - & 2 & 7 & 6 \\ \hline & 5 & 0 & 9 \end{array}$$

em que, ao decompor 80 em $70+10$, ficamos com 7 dezenas na ordem das dezenas e, com isto, subtraímos $15-6=9$. Este resultado poderia, também, ser facilmente obtido a partir do anterior, pois

$$785-276 = 785-273-3 = 512-3 = 509.$$

- $805-541 = 800+5-500-40-1 = 700+100+5-500-40-1 = 700-500+100+5-40-1 = 200+60+4$. Note que decompusemos $800 = 700+100$ para **reagrupar** essas 100 unidades junto as 5 unidades que já tínhamos e, assim, podermos subtrair as 41 unidades. Este reagrupamento (ou “reserva”) pode ser visualizado no seguinte *dispositivo prático*

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 100 & \\ & \cancel{8} & \cancel{0} & 5 \\ - & 5 & 4 & 1 \\ \hline & 2 & 6 & 4 \end{array}$$

em que, ao decompor 800 em $700+100$, ficamos com 7 centenas na ordem das centenas e, com isto, subtraímos $100-40=60$.
- Usando o resultado anterior, temos $805-547 = 805-541-6 = 264-6 = 264-4-2 = 258$. Podemos calcular essa diferença diretamente, usando o método da **compensação** como segue:

$$\begin{aligned} 805-547 &= 800+5-500-40-7 \\ &= 800+100+5-500-100-40-7 \\ &= 800-500-100+100+5-40-7 \\ &= 200+98+2+5-40-7 \\ &= 200+98-40+7-7 \\ &= 200+58 \\ &= 258. \end{aligned}$$

Veja a conta, “armada” no dispositivo prático da adição:

$$\begin{array}{rccc} & 8 & {}^{1}0 & 5 \\ -{}^{1} & 5 & 4 & 7 \\ \hline & 2 & 5 & 8 \end{array}$$

- Utilizamos, agora, outra forma de **compensação**:

$$\begin{aligned} 1\,005-768 &= 1\,000+5-700-68 \\ &= 1\,000+70+5-700-70-68 \\ &= 1\,000-700-70+70+5-68 \\ &= 300-70+2+5 \\ &= 230+7 \\ &= 237. \end{aligned}$$

■

Exercício 2.2 Qual número deve ser colocado no quadradinho a seguir?

$$\boxed{94 - \square = 57}$$

a) 27 b) 37 c) 47 d) 153

Solução. Para resolver este probleminha precisamos, simplesmente, calcular a diferença

$$94 - 57 = 37.$$

Assim, concluímos que

$$94 = 57 + 37.$$

Portanto,

$$94 - 37 = 57,$$

ou seja, $\square = 37$. ■

Outra forma de resolver seria começar pelo probleminha mais simples de encontrar um número $\triangle$ tal que

$$94 - \triangle = 60.$$

Como $94 = 60 + 34$, teríamos que subtrair 34 de 90 para obtermos 60. Logo

$$\triangle = 34.$$

Para obtermos 57, devemos subtrair mais 3 unidades, pois $60 = 57 + 3$. Logo, teríamos que subtrair $34 + 3 = 37$. Portanto,

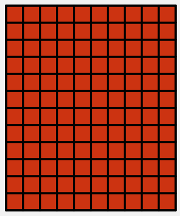
$$\square = 37.$$

3 Multiplicação e Divisão

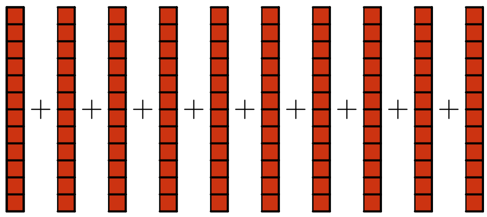
3.1 – Multiplicação como adição iterada de parcelas

No caderno anterior, estudamos a adição (e subtração) de números naturais. Vamos, agora, apresentar outra operação fundamental com os números naturais: a **multiplicação**. Para isso, iniciemos tentando resolver o seguinte problema.

Problema 4 Determine quantos quadradinhos há na seguinte figura sem precisar contá-los um a um:



Em vez de contar os quadradinhos um a um, podemos decompor a figura em colunas e somar as quantidades de quadradinhos em cada uma. Em cada coluna, há 12 quadradinhos. Como temos 10



colunas, o total de quadradinhos é

$$\underbrace{12+12+12+12+12+12+12+12+12+12}_{10 \text{ vezes}}.$$

Para calcular essa soma, observamos que $12 = 10 + 2$. Assim, a parcela 10 aparece 10 vezes (uma para cada coluna) e a parcela 2 aparece também 10 vezes (uma para cada coluna). Temos, portanto

$$10 \text{ vezes } 12 = 10 \text{ vezes } 10 + 10 \text{ vezes } 2.$$

Somando 10 vezes a parcela 10, temos 100. Somando 10 vezes a parcela 2, temos 20. Assim, concluímos que

$$10 \text{ vezes } 12 = 100 + 20 = 120.$$

Daqui por diante, usaremos o sinal × no lugar da palavra *vezes*. Assim, o número de quadradinhos que acabamos de determinar é igual a

$$10 \times 12 = 120.$$

Perceba que, se tivéssemos considerado as linhas da figura em vez das colunas, teríamos 12 linhas com 10 quadradinhos, ou seja, teríamos a soma

$$\underbrace{10+10+10+10+10+10+10+10+10+10+10+10}_{12 \text{ vezes}},$$

a qual simbolizamos por

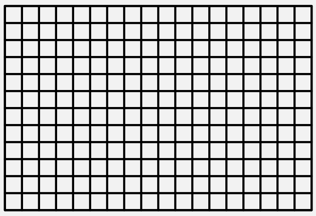
$$12 \times 10.$$

Concluímos que, de uma forma ou de outra, teríamos, ao fim, o número de quadradinhos da figura, isto é,

$$12 \times 10 = 10 \times 12 = 120.$$

Há diferentes maneiras de agrupar os quadradinhos em problemas desse tipo. Vejamos:

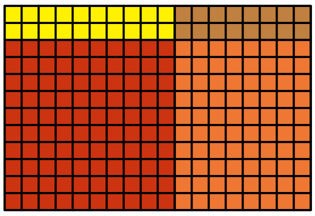
Problema 5 Determine, sem contar um a um, quantos quadradinhos há na seguinte figura:



Observe que há, na figura, 18 colunas com 12 quadradinhos cada, ou seja, o número total de quadradinhos é dado por

$$18\times 12.$$

Para calcular esse número, podemos dividir a figura do seguinte modo:



Decompondo a figura nessas quatro partes, temos 10 colunas com 10 quadradinhos, 10 colunas com 2 quadradinhos, 8 colunas com 10 quadradinhos e 8 colunas com 2 quadradinhos, ou seja,

$$18\times 12 = 10\times 10 + 10\times 2 + 8\times 10 + 8\times 2.$$

Concluímos, assim, que o número total de quadradinhos nesta figura é

$$18\times 12 = 100 + 20 + 80 + 16 = 216 \text{ quadradinhos.}$$

Ao efetuar esses cálculos, usamos o fato de que

$$8\times 10 = 10\times 8 = 80.$$

Além disso, o cálculo acima mostra que

$$\begin{aligned} 18\times 12 &= (10+8)\times(10+2) \\ &= 10\times 10 + 10\times 2 + 8\times 10 + 8\times 2. \end{aligned}$$

Esses fatos são, na verdade, consequências de propriedades gerais da multiplicação, a saber, a **comutatividade** e a **distributividade** com relação à adição.

Nota ao(à) professor(a) 3.1 Esta passagem do caderno merece bastante atenção, uma vez que estamos usando o modelo geométrico dos reticulados ("malhas quadriculadas") para apresentar o algoritmo da multiplicação. Como parte disso, explicamos, com o suporte das figuras, as propriedades fundamentais que tornam esse algoritmo válido: a comutatividade e a distributividade com relação à adição.

Nota ao(à) professor(a) 3.2 Aproveite o problema que está sendo discutido para propor a busca de soluções alternativas. Propusemos dividir a figura de modo a usar as decomposições decimais $18 = 10 + 8$ e $12 = 10 + 2$ e, com isto, ilustrarmos geometricamente o algoritmo da multiplicação. No entanto, você pode propor aos alunos divisões até mais intuitivas. Considerando, por exemplo, que $18 = 6 + 6 + 6$ e que $12 = 6 + 6$, você pode orientar seus alunos a dividir a figura em blocos 6×6 e, com isto, deduzir que

$$18\times 12 = (3\times 6)\times(2\times 6) = 6\times(6\times 6),$$

um exemplo prático da **associatividade** da multiplicação. Além disso, convém sugerir estratégias como um "completamento de quadrados". Por exemplo, considerando que $18 = 20 - 2$, observar que o cálculo poderia ser feito da seguinte forma

$$18\times 12 = (20 - 2)\times 12 = 20\times 12 - 2\times 12 = 240 - 24 = 220 - 4 = 216.$$

Problema 6 João organizou todas as suas figurinhas de jogadores de futebol em 18 pacotinhos com 12 figurinhas cada um. Quantas figurinhas ele possui?

Observe que o problema envolve a mesma multiplicação que efetuamos antes: como há 18 pacotinhos com 12 figurinhas, a quantidade total de figurinhas é

$$\underbrace{12 + 12 + 12 + \ldots + 12}_{\text{18 vezes}} = 18\times 12 = 216.$$

Assim como na adição e subtração, podemos "armar" essas contas da seguinte forma

$$\begin{array}{rr} & 10 + 8 \\ \times & 10 + 2 \\ \hline & 20 + 16 \\ + & 100 + 80 \\ \hline & 200 + 10 + 6 \end{array}$$

Note que as 16 unidades que vêm do produto 2×8 são decompostas em $10 + 6$, ou seja, em 1 dezena e 6 unidades. Assim, "deixamos" as 6 unidades na ordem das unidades e somamos esta 1 dezena às 2 dezenas e às 8 dezenas que já estavam na ordem das dezenas. Obtemos assim, $10 + 20 + 80 = 30 + 80 = 110$, ou seja, 1 centena e 1 dezena. Deixamos esta 1 dezena na ordem das dezenas e somamos esta 1 centena à 1 centena que já estava na ordem das centenas, obtendo, por fim, 2 centenas. De modo mais resumido, organizamos esses cálculos no seguinte *dispositivo prático*:

$$\begin{array}{rrr} & 1 & 8 \\ \times & 1 & 2 \\ \hline & 3 & 6 \\ 1 & 8 & \\ \hline 2 & 1 & 6 \end{array}$$

Problema 7 Natanael comprou uma geladeira e um computador para uso da família, financiando a compra em 24 parcelas de R\$ 256. Qual foi o valor total da compra financiada?

O valor total é o resultado da seguinte multiplicação:

$$\underbrace{256 + 256 + 256 + \ldots + 256}_{\text{24 vezes}} = 24\times 256.$$

Para calcular este **produto**, usamos o **algoritmo da multiplicação** do seguinte modo:

$$\begin{aligned} 24\times 256 &= (20 + 4)\times(200 + 50 + 6) \\ &= 4\times 6 + 4\times 50 + 4\times 200 + 20\times 6 + 20\times 50 + 20\times 200 \\ &= 24 + 200 + 800 + 120 + 1\,000 + 4\,000 \\ &= 4 + 20 + 200 + 800 + 20 + 100 + 1\,000 + 4\,000 \\ &= 4 + 20 + 1\,000 + 20 + 100 + 1\,000 + 4\,000 \\ &= 1\,024 + 5\,120 \\ &= 6\,144. \end{aligned}$$

Usando o dispositivo prático para organizar as etapas do algoritmo nas linhas acima, temos

$$
\begin{array}{r}
1\,1 \\
2\,2 \\
2\,5\,6 \\
\times\,2\,4 \\
\hline
1\,0\,2\,4 \\
+\,5\,1\,2\,0 \\
\hline
6\,1\,4\,4
\end{array}
$$

Começamos multiplicando 4 por 6 na coluna das unidades (mais à direita), o que resulta em $24 = 20+4$, sendo que as 4 unidades ficam na coluna das unidades e as 20 unidades (ou 2 dezenas) "vão" para a coluna das dezenas, o que simbolizamos com o algarismo 2 à direita na segunda linha. Em seguida, multiplicamos 4 por 50 (representado pelo algarismo 5 na coluna das dezenas na terceira linha), obtendo $4{\times}50 = 200$. Somamos 200 e 20 (as 2 dezenas na segunda linha), obtemos 2 centenas (que "vão" para a coluna das centenas na forma do algarismo 2 à esquerda na segunda linha) e 2 dezenas que "ficam" na coluna das dezenas. Na sequência, multiplicamos 4 por 200 (representado pelo algarismo 2 na terceira linha) e somamos o resultado às 2 centenas que "foram" para a coluna das centenas, obtendo $4{\times}200 + 200 = 800 + 200 = 1\,000$. Assim, chegamos ao resultado $1\,000 + 20 + 4 = 1\,024$ na quinta linha.

Continuando o processo, multiplicamos agora 20 (representado pelo algarismo 2 na quarta linha) e 6, obtendo $120 = 100 + 20$ unidades, das quais 100 "vão" para a coluna das centenas (o algarismo 1 na primeira linha, à direita) e 2 dezenas "ficam" na coluna das dezenas (representadas pelo número 20 na sexta linha). Em seguida, multiplicamos 20 por 50, obtendo 1 000 unidades ou 10 centenas, às quais somamos a 1 centena que "foi" para a coluna das centenas, obtendo 11 centenas ou, seja, 1 milhar (que "vai" para a coluna dos milhares, representados pelo algarismo 1 na primeira linha, à esquerda) e 1 centena que "fica" na coluna das centenas, na sexta linha. Por fim, multiplicamos 20 por 200 (representado pelo algarismo 2 na terceira linha), obtendo $20{\times}200 = 4\,000$ ou 4 milhares; somamos o 1 milhar que "foi" para a coluna dos milhares, obtendo 5 milhares, representados pelo algarismo 5 na sexta linha. Com estes passos, chegamos ao resultado na sexta linha: $5\,000 + 100 + 20 = 5\,120$.

Observação 3.1 É importante notar que há várias formas de efetuar a multiplicação, ou seja, não há uma única maneira de executar o algoritmo da multiplicação! Deve-se apenas ficar atento ao uso adequado das propriedades fundamentais, o que garante que o resultado obtido estará correto. Por exemplo, uma estratégia alternativa para calcular o produto acima é a seguinte: utilizando a *associatividade* da multiplicação, calculamos

$$256{\times}20 = 256{\times}2{\times}10 = 512{\times}10 = 5\,120.$$

E, usando a *distributividade* em relação à adição, obtemos

$$256{\times}4 = (250 + 6){\times}4 = 250{\times}4 + 6{\times}4 = 1.000 + 24 = 1\,024.$$

Somando os dois resultados, temos

$$256{\times}24 = 256{\times}20 + 256{\times}4 = 5\,120 + 1\,024 = 6\,144.$$

Outra abordagem para simplificar as contas feitas nessas multiplicações combina divisões e multiplicações. Por exemplo:

$$24{\times}250 = 24{\times}1\,000 : 4 = 24\,000 : 4 = 6\,000,$$

e

$$24{\times}6 = 4{\times}6{\times}6 = 4{\times}36 = 2{\times}72 = 144.$$

Pode-se, ainda, empregar decomposições diferentes das que apresentamos acima, envolvendo *subtrações* e *divisões*, como em:

$$\begin{aligned}256\times 24 &= 256\times(25-1) = 256\times 25 - 256\times 1\\ &= (256\times 100) : 4 - 256 = 25\,600 : 4 - 256\\ &= (24\,000 + 1\,600) : 4 - 256 = 6\,000 + 400 - 256\\ &= 6\,000 + 144 = 6\,144.\end{aligned}$$

Outro algoritmo seria aplicar a propriedade distributiva duplamente:

$$\begin{aligned}256\times 24 &= (25\times 10 + 6)\times(2\times 10 + 4)\\ &= 25\times 10\times 2\times 10 + 6\times 2\times 10 + 25\times 10\times 4 + 6\times 4\\ &= 50\times 100 + 12\times 10 + 100\times 10 + 24\\ &= 6\,000 + 120 + 24 = 6\,144.\end{aligned}$$

Os cálculos acima podem ser organizados no seguinte dispositivo prático:

$$\begin{array}{r} 2\,5\,6\\ \times\,2\,4\\ \hline 2\,4\\ 1\,0\,0\,0\\ 1\,2\,0\\ +\,5\,0\,0\,0\\ \hline 6\,1\,4\,4\end{array}$$

Essas abordagens alternativas permitem efetuar corretamente as multiplicações de forma mais rápida e segura, porque envolvem contas mais fáceis de checar. Além disso, sugerem estratégias úteis de **cálculo mental**.

Problema 8 — Prova Brasil. A professora de João pediu para ele decompor um número e ele fez da seguinte forma:

$$4\times 1\,000 + 3\times 10 + 5\times 1$$

Qual foi o número pedido?

a) 4 035 b) 4 305 c) 5 034 d) 5 304

Solução. Temos

$$\begin{aligned}4\times 1\,000 + 3\times 10 + 5\times 1 &= 4\,000 + 30 + 5\\ &= 4\,035.\end{aligned}$$

A resposta é a alternativa a). ■

Problema 9 Qual o resultado de 50×137?

a) 5 350 b) 6 500 c) 6 850 d) 7 000

Solução. Temos

$$\begin{aligned}50\times 137 &= 50\times(100 + 30 + 7)\\ &= 5\,000 + 1\,500 + 350\\ &= 6\,850.\end{aligned}$$

A resposta é a alternativa c). ■

Problema 10 — Prova Brasil. Num pacote de balas contendo 10 unidades, o peso líquido é de 49 gramas. Em 5 pacotes teremos quantos gramas?

a) 59 b) 64 c) 245 d) 295

Solução. Em 5 pacotes teremos $5\times49 = 245$ gramas. A resposta é alternativa c). ■

3.2 – Propriedades da multiplicação

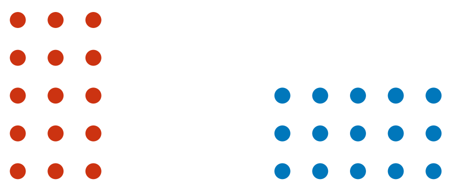
A seguir, vamos discutir as seguintes *propriedades operatórias* da multiplicação que justificam os diversos *algoritmos* usados para efetuar essa operação:

- comutatividade
- associatividade
- distributividade (em relação à adição)

A) A propriedade comutativa

A propriedade *comutativa* vale tanto para a adição como para a multiplicação. No caso da adição, esta propriedade assegura que a ordem em que dispomos as parcelas em uma adição não altera o resultado, isto é, não modifica a soma. É uma propriedade tão óbvia que fazemos uso dela sem nos darmos conta. Por exemplo, se andamos 3 metros e, em seguida, *mais* 5 metros, percorremos a mesma distância que se andássemos 5 metros e, em seguida, *mais* 3 metros: seriam os mesmos 8 metros de percurso.

A multiplicação também é comutativa, mas isso não é tão imediato quanto na adição. Por exemplo, alguém pode, naturalmente, questionar se, de fato, 3 fileiras com 5 alunos têm a mesma quantidade de pessoas que 5 fileiras com 3 alunos. Uma maneira de verificar essa igualdade é representar as duas situações como nas figuras abaixo:



3×5 5×3

A figura acima, à esquerda, traz 3 colunas com 5 pontos iguais em cada, representando a multiplicação $3\times5 = 5+5+5$. Já na figura à direita, temos 5 colunas de 3 pontos, o que representa a multiplicação $5\times3 = 3+3+3+3+3$. É fácil ver que os pontos da esquerda e da direita formam "retângulos" iguais, sendo que um é obtido do outro por uma rotação (trocando-se linhas por colunas e vice-versa). Como ambos os "retângulos", 3×5 e 5×3, têm a mesma quantidade total de pontos (a saber, 15), constatamos que $5\times3 = 3\times5$ (ambos iguais a 15).

B) A propriedade distributiva

Ao escrevermos várias operações numa mesma sentença, *estabelecemos* a seguinte *relação de prioridade* entre as operações: multiplicações devem ser realizadas antes de adições e subtrações. Por exemplo,

$$3\times5+2 = 15+2 = 17.$$

A multiplicação tem prioridade (em relação à adição) mesmo que ela apareça mais à direita na **expressão numérica**:

$$2+3\times5 = 2+15 = 17.$$

Para alterar a ordem em que as operações devem ser feitas e, assim, inverter as prioridades, temos de usar parênteses, com a convenção de que as operações entre parênteses devem ser realizadas antes das outras operações. Assim,

$$3\times(5+2) = 3\times 7 = 21.$$

A propriedade *distributiva* da multiplicação transforma uma multiplicação "com parênteses" em operações "sem parênteses". Como no caso da propriedade comutativa, podemos visualizar a propriedade distributiva usando retângulos conforme vemos na Figura 3.1. Um uso interessante das propriedades distributivas

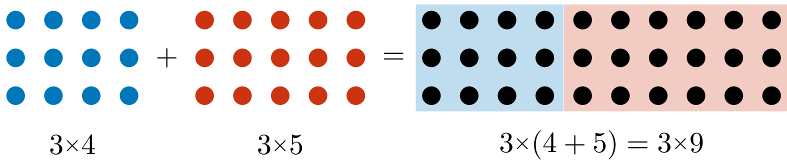


Figura 3.1: Representação da propriedade distributiva organizando objetos em retângulos.

é transformar multiplicações trabalhosas em outras mais simples, que apenas necessitem de cálculo mental, juntamente com adições ou subtrações. Por exemplo, para calcular 18×23 podemos fazer

$$18\times 23 = 18\times(20+3) = 18\times 20 + 18\times 3 = 360 + 54 = 414.$$

Outra alternativa seria

$$18\times 23 = (20-2)\times 23 = 20\times 23 - 2\times 23 = 460 - 46 = 414.$$

C) A propriedade associativa

A *propriedade associativa* (ou simplesmente a *associatividade*) da multiplicação de números naturais diz que, se tivermos apenas multiplicações na **expressão numérica**, então parênteses são desnecessários. Por exemplo, aplicando a propriedade associativa para calcular

$$3\times 5\times 10,$$

garantimos que tanto faz calcular primeiro 3×5 e, depois, multiplicar o resultado por 10 (isto é, fazer $(3\times 5)\times 10 = 15\times 10 = 150$), quanto calcular primeiro 5×10 e, em seguida, multiplicar o resultado por 3 (isto é, fazer $3\times(5\times 10) = 3\times 50 = 150$).

Nota ao(à) professor(a) 3.3 Recomendamos usar modelos geométricos como paralelepípedos retângulos de dimensões inteiras para ilustrar geometricamente a propriedade da associatividade: rotações de um paralelepípedo retângulo preservam seu volume e, portanto, o produto das medidas de suas 3 dimensões lineares. Esta atividade permite, assim, relacionar propriedades das operações aritméticas às invariâncias de medidas geométricas.

Problema 11 — Adaptado do Círculo Matemático de Moscou.

a) Verifique a igualdade dos produtos em

$$333\times 444 = 222\times 666$$

b) O que é maior, 333×444 ou 222×667?

a) Perceba que $333 = 3\times 111$ e $444 = 4\times 111$. Como $3\times 4 = 12$, temos

$$333\times 444 = 3\times 111\times 4\times 111 = 12\times 111\times 111.$$

Por outro lado, como $2\times 6 = 12$, temos

$$222\times 666 = 2\times 111\times 6\times 111 = 12\times 111\times 111.$$

b) Como o fator 666 é menor que 667 o produto 222×666 é menor que o produto 222×667. Assim,

$$333\times 444 = 222\times 666 < 222\times 667.$$

3.3 – A tabuada

Muita gente não consegue fazer multiplicações com facilidade, usando papel e caneta ou mentalmente, porque não lembra de cor os resultados de multiplicações de números pequenos. A *tabuada de multiplicação* pode ajudar nisso, já que ela traz os resultados das multiplicações de números de 1 a 9 (veja a tabela a seguir). Outra utilidade da tabuada é que ela nos ajuda a entender o conceito de

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Figura 3.2: A tabuada de multiplicação.

múltiplo: em cada linha (ou coluna), temos os primeiros múltiplos de $2, 3, \ldots, 9$. Por exemplo, os nove primeiros múltiplos de 3 aparecem na quarta linha (e na quarta coluna):

$$1\times 3 = 3,\quad 2\times 3 = 6,\quad 3\times 3 = 9,\quad 4\times 3 = 12,\quad 5\times 3 = 15,\quad 6\times 3 = 18,\quad 7\times 3 = 21,\quad 8\times 3 = 24,\quad 9\times 3 = 27,$$

e assim por diante.

Nota ao(à) professor(a) 3.4 Devemos fortalecer, no aluno, a atitude de aprender a tabuada da multiplicação, não por memorização direta, mas aplicando-a e observando suas propriedades. De fato, pode ser sugerida uma atividade para preencher as entradas da tabuada de multiplicação como uma espécie de *Sudoku*[a], no qual os números em cada casa têm certas propriedades fáceis de lembrar, e que listamos a seguir:

(a) A tabuada de multiplicação por 1 é imediata (a ideia de **elemento neutro** pode ser explorada neste ponto).

(b) A tabela possui vários números repetidos separados pela diagonal (dizemos que a tabela é *simétrica em relação à diagonal descendente*). Isso segue da **comutatividade** da multiplicação. Por exemplo, $5\times 4 = 4\times 5 = 20$ são entradas repetidas e simétricas em relação à diagonal descendente.

(c) A coluna (ou linha) do 9 é montada, iniciando pelo número 09 e fazendo o algarismo da dezena aumentar de 0 a 8 à medida que o da unidade diminui de 9 a 1: 09, 18, 27, ..., 72, 81.

(d) Para lembrar a tabuada de multiplicação do 4, podemos observar que, como $4 = 2\times 2$, obtemos a tabuada de 4, multiplicando por 2 os resultados da tabuada de 2.

(e) Da mesma forma, como $8 = 4\times 2$, para escrever os resultados da tabuada do 8, multiplicamos os resultados da tabuada do 2 por 4.

(f) Um raciocínio análogo vale para a tabuada do 6, se já soubermos as tabuadas do 2 e do 3, pois $6 = 2\times 3 = 3\times 2$.

(g) Os resultados da tabuada de multiplicação por 5 são fáceis de memorizar, ainda mais se lembrarmos que multiplicar por 5 é o mesmo que multiplicar por 10 (e, para isso, basta adicionar um zero à direita do número) e, em seguida, dividir o resultado por 2. Por exemplo, podemos calcular $7\times 5 = \frac{7\times 10}{2} = \frac{70}{2} = 35$.

(h) A tabuada de multiplicação por 7 pode ser lembrada usando a simetria da tabela. Por exemplo, se já sabemos a tabuada do 4, segundo a qual $4\times 7 = 28$, então sabemos também que $7\times 4 = 28$.

Os números na diagonal descendente são os *quadrados* dos números de 1 a 9.

[a] Sudoku é um famoso quebra-cabeça baseado na colocação lógica de números sobre um tabuleiro.

3.4 – Potências de dez e o sistema posicional

Os algoritmos da adição e da multiplicação são explicados pelas propriedades destas operações e pelo uso do **sistema posicional decimal**. Da mesma forma, o uso do sistema decimal fica mais simples quando expressamos a composição e decomposição dos números naturais em termos da adição e da multiplicação. Voltemos aos exemplos com populações: a população estimada do Estado do Ceará, em 2021, é de

$$9\,240\,580 \text{ habitantes},$$

ou seja,

$$9 \text{ milhões } + 240 \text{ mil } + 580$$

habitantes, número que podemos decompor no sistema decimal em termos da **adição** de parcelas, uma para cada classe decimal:

$$9\,000\,000 + 200\,000 + 40\,000 + 500 + 80.$$

Usando a **multiplicação**, obtemos uma decomposição completa deste número, em cada uma das classes e ordens decimais:

$$9\,240\,580 = 9{\times}1\,000\,000 + 2{\times}100\,000 + 4{\times}10\,000 + 5{\times}100 + 8{\times}10.$$

Portanto, a adição e a multiplicação, juntas, permitem escrever a decomposição completa de um dado número natural em todas as classes e ordens decimais de que for composto. Para fixar as ideias, segue mais um exemplo.

Problema 12 As populações (estimadas em 2021 pelo IBGE) dos municípios de Camocim e Granja são, respectivamente, iguais a 64 147 e 55 170 habitantes. Escreva a decomposição decimal desse números. Em seguida, utilize essas decomposições para calcular a soma dessas populações.

As decomposições decimais são dadas por

$$\begin{aligned} 64\,147 &= 60\,000 + 4\,000 + 100 + 40 + 7 = 6{\times}10\,000 + 4{\times}1\,000 + 1{\times}100 + 4{\times}10 + 7,\\ 55\,170 &= 50\,000 + 5\,000 + 100 + 70 + 0 = 5{\times}10\,000 + 5{\times}1\,000 + 1{\times}100 + 7{\times}10 + 0. \end{aligned}$$

Dadas estas decomposições, a soma dos dois números torna-se bastante simples. Vejamos

$$\begin{array}{r} 6{\times}10\,000 + 4{\times}1\,000 + 1{\times}100 + 4{\times}10 + 7\\ +\ 5{\times}10\,000 + 5{\times}1\,000 + 1{\times}100 + 7{\times}10 + 0\\ \hline 11{\times}10\,000 + 9{\times}1\,000 + 2{\times}100 + 11{\times}10 + 7 \end{array}$$

Observe, agora, que

$$\begin{aligned} 11{\times}10 &= 10{\times}10 + 1{\times}10 = 100 + 10\\ 11{\times}10\,000 &= 10{\times}10\,000 + 1{\times}10\,000 = 100\,000 + 10\,000. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} 64\,147 + 55\,170 &= 11{\times}10\,000 + 9{\times}1\,000 + 2{\times}100 + 11{\times}10 + 7\\ &= 100\,000 + 10\,000 + 9{\times}1\,000 + 3{\times}100 + 1{\times}10 + 7\\ &= 119\,317 \end{aligned}$$

é a soma desejada, isto é, o total de habitantes em Camocim e Granja, de acordo com as estimativas de 2021.

Problema 13 De acordo com as estimativas do IBGE, o município de Guaramiranga tem uma média de 56 habitantes em cada quilômetro quadrado. Sabendo que a área total do município é aproximadamente igual a 91 quilômetros quadrados, qual é, aproximadamente, sua população?

Para resolver este problema, usaremos a decomposição decimal dos números 56 e 91:

$$\begin{aligned} 56 &= 50 + 6 = 5\times 10 + 6,\\ 91 &= 90 + 1 = 9\times 10 + 1. \end{aligned}$$

Como cada quilômetro quadrado tem, em média, 56 habitantes, a população total é dada pelo produto 56×91. Para calcular o resultado desta multiplicação, usamos a decomposição decimal da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 56\times 91 &= (5\times 10 + 6)\times(9\times 10 + 1)\\ &= 5\times 9\times 10\times 10 + 5\times 10\times 1 + 6\times 9\times 10 + 6\times 1\\ &= 45\times 100 + 5\times 10 + 54\times 10 + 6\\ &= (4\times 10 + 5)\times 100 + 5\times 10 + (5\times 10 + 4)\times 10 + 6\\ &= 4\times 1\,000 + 5\times 100 + 5\times 100 + 5\times 10 + 4\times 10 + 6\\ &= 4\times 1\,000 + 10\times 100 + 9\times 10 + 6\\ &= 5\times 1\,000 + 9\times 10 + 6\\ &= 5\,096, \end{aligned}$$

ou seja, aproximadamente 5 100 habitantes. Nessas contas, usamos também a **associatividade** e a **distributividade** da multiplicação com relação à adição.

Para abreviar o tamanho das expressões e também representar quantidades cada vez maiores, usamos a **notação** das **potências de dez**. Escrevemos

$$\begin{aligned} 10 &= 10^1,\\ 100 &= 10^2,\\ 1\,000 &= 10^3,\\ 10\,000 &= 10^4,\\ 100\,000 &= 10^5,\\ 1\,000\,000 &= 10^6, \end{aligned}$$

e assim por diante. Com esta notação, o número

$$100\,000\,000\,000\,000$$

(cem trilhões), por exemplo, pode ser escrito como 10^{14}, já que temos 14 zeros nesse número. Note que a potência 10^5, ou seja, o número 100 000, é 10 vezes maior que a potência $10^4 = 10\,000$ e 100 vezes maior que $10^3 = 1\,000$. Da mesma forma, 10^{14} é 10 vezes maior que 10^{13}, 100 vezes maior que 10^{12}, e assim por diante. Observamos, além disso, que

$$10^3\times 10^2 = 1\,000\times 100 = 100\,000 = 10^5.$$

Em geral, se m e n são números naturais, então

$$10^m\times 10^n = 10^{m+n}.$$

Essa propriedade facilita bastante o uso do sistema posicional decimal para efetuar cálculos com números muito grandes.

Problema 14 Você sabe de onde vem o nome Google? Tem a ver com números muito grandes?

Problema 15 Já ouviu falar de Arquimedes? Um dia, ele cismou em saber quantos grãos de areia poderiam preencher toda uma praia? Você tem ideia disso? `https://www.youtube.com/watch?v=NRjafzwzwlg`.

3.5 – A multiplicação cruzada

Vimos várias vezes que pode ser muito vantajoso usar diferentes estratégias para calcular somas e produtos. Nesta seção, apresentamos o *método da multiplicação cruzada*, mais um algoritmo de multiplicação baseado nas propriedades da multiplicação e do sistema posicional decimal. Você vai entender a razão deste nome nos exemplos a seguir.

Exemplo

Para efetuar o produto 57×36 pelo método da multiplicação cruzada, escrevemos diretamente o resultado da operação da *direita para a esquerda*[1] como explicamos abaixo:

$$\begin{array}{r} 57 \\ 36 \\ \hline 2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 57 \\ 36 \\ \hline 52 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 57 \\ 36 \\ \hline 2052 \end{array}$$

Iniciamos efetuando a multiplicação $7 \times 6 = 42$. Escrevemos 2 na última coluna da direita e levamos 4 para a próxima etapa, que é calcular a expressão $4 + (5 \times 6 + 7 \times 3) = 55$. Essa etapa é que dá o nome ao método, pois nela as multiplicações são cruzadas:

$$\begin{tikzcd} 5 \arrow[dr] & 7 \arrow[dl] \\ 3 & 6 \end{tikzcd}$$

Escreve-se 5 ao lado do numeral 2, e leva-se (o outro) 5 para o último passo, que é calcular a expressão $5 + 5 \times 3 = 20$. Então, escreve-se 20 à esquerda de 52, obtendo 2 052 como resultado da multiplicação.

Esse método é validado pelas propriedades do sistema posicional decimal e pela propriedade distributiva. De fato, distribuindo produtos, obtemos:

$$\begin{aligned} 57 \times 36 &= (50 + 7) \times (30 + 6) \\ &= 50 \times 30 + (7 \times 30) + (50 \times 6) + 7 \times 6. \end{aligned}$$

Aplicando novamente a propriedade distributiva, temos:

$$\begin{aligned} 57 \times 36 &= (5 \times 3) \times 100 + ((7 \times 3) + (5 \times 6)) \times 10 + 7 \times 6 \\ &= 15 \times 100 + 51 \times 10 + 42. \end{aligned}$$

(Veja que a multiplicação cruzada aparece na penúltima igualdade.) Assim, 57×36 são 15 centenas, 51 dezenas e 42 unidades. Mas 42 unidades são 4 dezenas mais 2 unidades, ao passo que 51 dezenas são 5 centenas mais 1 dezena; dessa forma, justificamos levar 4 para a "casa" das dezenas e 5 para a "casa" das centenas). Consequentemente, 57×36 são $15 + 5 = 20$ centenas, $1 + 4 = 5$ dezenas e 2 unidades.

[1] Quando se usa caneta e papel, geralmente é mais eficiente resolver as operações da direita para a esquerda.

3.6 – Divisões de números naturais

Nesta seção, estudaremos a divisão de um número natural por outro, diferente de zero. Por exemplo, podemos dividir 24 unidades em 4 partes de 6 unidades ou em 6 partes de 4 unidades. Representamos essas divisões, respectivamente, por

$$24 : 4 = 6 \quad \text{e} \quad 24 : 6 = 4$$

ou

$$\frac{24}{4} = 6 \quad \text{e} \quad \frac{24}{6} = 4.$$

Esses divisões são justificadas pelo fato de que

$$4 \times 6 = 24 \quad \text{e} \quad 6 \times 4 = 24,$$

como vimos na tabuada acima. Observamos que, *agrupando* as 24 unidades em conjuntos de 6 unidades ou de 4 unidades, não há *restos*. Temos um exemplo de divisão exata. Este não é o caso das divisões

$$\frac{25}{4} \;\text{ ou }\; 25 : 4, \quad \frac{26}{4} \;\text{ ou }\; 26 : 4, \quad \frac{27}{4} \;\text{ ou }\; 27 : 4,$$

em que temos, nessa ordem,

$$\begin{aligned} 25 &= 4 \times 6 + 1, \\ 26 &= 4 \times 6 + 2, \\ 27 &= 4 \times 6 + 3. \end{aligned}$$

Nessas divisões, temos *restos* 1, 2 e 3, respectivamente, que, por serem números menores que 4, não permitem, obviamente, formar mais grupos de 4 unidades. Continuando, vejamos que

$$28 = 4 \times 6 + 4 = 4 \times 7,$$

ou seja, formamos mais um grupo de 4 unidades com o resto igual a 4, finalizando a divisão com resto 0. Prosseguindo, temos

$$\begin{aligned} 29 &= 4 \times 6 + 5 = 4 \times 7 + 1, \\ 30 &= 4 \times 6 + 6 = 4 \times 7 + 2, \end{aligned}$$

e assim por diante, com os restos $0, 1, 2$ e 3 aparecendo **sucessiva** e **repetidamente** nas divisões por 4.

De modo geral, ao dividir um número por 4, devemos encontrar o múltiplo de 4 **mais próximo** e **menor** que este dado número. Por exemplo, ao dividirmos 253 por 4, podemos ver que

$$\begin{aligned} 253 : 4 &= (24 \times 10 + 13) : 4 = (4 \times 6 \times 10 + 13) : 4 \\ &= 6 \times 10 + 13 : 4 = 60 + (12 + 1) : 4 \\ &= 60 + (3 \times 4 + 1) : 4 = 63 + 1 : 4. \end{aligned}$$

Resumimos o resultado dessa *sequência de divisões*, escrevendo

$$253 = 4 \times 63 + 1,$$

onde 1 representa o *resto* desta divisão e o resultado 63 é o *quociente* da divisão de 253 (o *dividendo*) por 4 (o *divisor*). Note que o *algoritmo da divisão*, isto é, a sequência de passos, parou ao chegarmos a um número, o resto, que não poderia mais ser dividido em partes de 4 unidades. De fato, dividindo 1 por 4, temos apenas uma *fração* de uma unidade, que denotamos por $\frac{1}{4}$.

De modo geral, a **divisão** (chamada euclidiana) de um número natural m, o **dividendo**, por um número natural não-nulo n, o **divisor**, resulta em um **quociente** q e em um **resto** r, que pode ser igual a 0 e é menor do que o divisor n. Escrevemos:

$$\underbrace{m}_{\text{dividendo}} = \overbrace{n}^{\text{divisor}} \times \underbrace{q}_{\text{quociente}} + \overbrace{r}^{\text{resto}}$$

Uma maneira de **visualizar** os termos no algoritmo da divisão é escrevê-lo usando o diagrama da “chave”:

$$\begin{array}{r|l} m & n \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Para reforçar nosso entendimento da divisão euclidiana, consideremos, agora, a divisão de 500 por 16, sabendo que $480 = 30\times 16$. Com esta informação dada, calculamos:

$$500 : 16 = (480 + 20) : 16 = 480 : 16 + 20 : 16.$$

Note que o *algoritmo euclidiano da divisão* não para nesta etapa: devemos prosseguir dividindo 20 por 16. Como $20 = 16 + 4$, segue que

$$500 : 16 = 30 + (16 + 4) : 16 = 30 + 1 + 4 : 16.$$

Essas operações podem ser resumidas no diagrama da “chave” como segue:

$$\begin{array}{r|l} 5\,0\,0 & 1\,6 \\ \cline{2-2} -\underline{4\,8} & 3\,1 \\ 2\,0 & \\ -\underline{1\,6} & \\ 4 & \end{array}$$

Estudemos mais um exemplo da divisão euclidiana. Consideremos, agora, a divisão de 6 157 por 24. Suponha que *descobrimos* um múltiplo de 24 próximo de 6 157:

$$6\,144 = 24\times 256.$$

Logo, *sabendo* desta informação, decompomos 6 561 em $6\,144 + 417$ e escrevemos

$$6\,561 : 24 = (6\,144 + 417) : 24 = 6\,144 : 24 + 417 : 24 = 256 + 417 : 24.$$

Note que o *algoritmo euclidiano da divisão* não para nesta etapa: devemos prosseguir dividindo 417 por 24. A ideia fundamental, na próxima etapa, é encontrar o *múltiplo* de 24 mais próximo e menor que 417. Podemos tentar $24\times 20 = 480$, mas este número é maior que 417. Portanto, outra tentativa seria $24\times 15 = 12\times 2\times 15 = 12\times 30 = 360$, mas, desta vez, obtemos uma *aproximação* ainda não muito boa de 417, já que

$$417 = 360 + 57 = 24\times 15 + 57.$$

Uma vez que $57 = 48 + 9 = 24\times 2 + 9$, concluímos que a melhor aproximação de 417 por um múltiplo de 24 é $24\times 15 + 24\times 2 = 360 + 48 = 408$. Em resumo, escrevemos

$$\begin{aligned} 6\,165 : 24 &= 256 + 417 : 24 = \\ &= 256 + (24\times 17 + 9) : 24 \\ &= 256 + 17 + 9 : 24 = 273 + 9 : 24. \end{aligned}$$

O algoritmo para aqui, uma vez que o resto 9 é menor que 24 e, portanto, dividindo este resto por 24, obtemos apenas uma fração, $\frac{9}{24}$ de uma unidade. Concluímos que

$$6\,561 = 24\times 273 + 9.$$

Observe que começamos estas contas com a informação, já *conhecida*, de que $6\,144 = 24\times 256$. Caso não tivéssemos essa informação, como poderíamos proceder? O algoritmo da divisão, neste caso, poderia ser executado da seguinte forma

$$\begin{aligned}
6\,561 : 24 &= (6\,500 + 61) : 24 = (65{\times}100 + 61) : 24\\
&= [(48 + 17){\times}100 + 61] : 24 = (48{\times}100) : 24 + (17{\times}100 + 61) : 24\\
&= 2{\times}100 + (176{\times}10 + 1) : 24\\
&= 2{\times}100 + [(168 + 8){\times}10 + 1] : 24\\
&= 2{\times}100 + (168{\times}10) : 24 + (8{\times}10 + 1) : 24\\
&= 2{\times}100 + 7{\times}10 + (72 + 9) : 24\\
&= 2{\times}100 + 7{\times}10 + 72 : 24 + 9 : 24\\
&= 2{\times}100 + 7{\times}10 + 3 + 9 : 24 = 273 + 9 : 24.
\end{aligned}$$

Podemos organizar os passos do algoritmo da divisão com o uso do seguinte diagrama (“método da chave”):

$$\begin{array}{r|l}
6\,5\,6\,1 & 2\,4 \\ \cline{2-2}
-\underline{4\,8} & 2\,7\,3 \\
1\,7\,6 & \\
-\underline{1\,6\,8} & \\
8\,1 & \\
-\underline{7\,2} & \\
9 &
\end{array}$$

Para reforçar as ideias, vamos, agora, usar o “método da chave” para dividir 98 016 por 24:

$$\begin{array}{r|l}
9\,8\,0\,1\,6 & 2\,4 \\ \cline{2-2}
-\underline{9\,6} & 4\,0\,8\,4 \\
2\,0 & \\
-\underline{0} & \\
2\,0\,1 & \\
-\underline{1\,9\,2} & \\
9\,6 & \\
-\underline{9\,6} & \\
0 &
\end{array}$$

O primeiro passo no algoritmo representado pelo diagrama acima é decompor 98 016 em 98.000 + 16. Em seguida, para dividir 98 000 por 24, verificamos que o múltiplo de 24 mais próximo e menor que 98 é $96 = 24{\times}4$. Logo, $96\,000 = 24{\times}4.000$. Calculamos a diferença $98\,000 - 96\,000 = 2\,000$. Portanto, precisamos dividir as 2 016 unidades restantes por 24. Para isto, decompomos $2\,016 = 2\,010 + 6$. Observamos que o múltiplo de 24 mais próximo e menor que 201 é $192 = 24{\times}8$. Logo, $1\,920 = 24{\times}80$. Calculamos a diferença $2\,010 - 1\,920 = 90$. Somando estas 90 unidades às 6 restantes, temos 96. Dividimos este resto, 96, por 24, obtendo $96 = 24{\times}4$. Com estas divisões sucessivas, concluímos que

$$98\,016 = 24{\times}(4\,000 + 80 + 4) = 24{\times}4\,084.$$

Observamos que as várias etapas nas divisões sucessivas aparecem naturalmente quando efetuamos a multiplicação do divisor e do quociente usando a distributividade, decompondo ambos. Temos

$$\begin{aligned}
24{\times}4\,084 &= 24{\times}(4\,000 + 80 + 4) = 24{\times}4{\times}1\,000 + 24{\times}(80 + 4)\\
&= 96\,000 + 24{\times}8{\times}10 + 24{\times}4\\
&= 96\,000 + 1\,920 + 96.
\end{aligned}$$

Problema 16 O professor Emiliano, do 5º ano, resolveu a operação a seguir, mas, durante o recreio, o aluno Bruno apagou o resultado:

$$\begin{array}{r|c}
1775 & 25 \\ \cline{2-2}
0 & ?
\end{array}$$

O resultado dessa operação é:

a) 51 b) 61 c) 71 d) 81

Solução. Usando o algoritmo da divisão:

$$\begin{array}{r|l} 1\,7\,7\,5 & 2\,5 \\ \cline{2-2} -\underline{1\,7\,5} & 7\,1 \\ 2\,5 & \\ -\underline{2\,5} & \\ 0 & \end{array}$$

obtemos que o resultado é 71. ■

Problema 17 Estime o produto 732×341.

Solução. Arrendondamos 732 por 700 e 341 por 300 obtendo a seguinte estimativa para o produto

$$700 \times 300 = 210\,000$$

Para melhorar esta estimativa, somamos a este resultado os seguintes produtos

$$700 \times 40 = 28\,000 \quad \text{e} \quad 300 \times 30 = 9\,000,$$

obtendo

$$210\,000 + 28\,000 + 9\,000 = 247\,000,$$

estimativa melhor para o produto exato, que é igual a 249 612. ■

Problema 18 Estime o quociente $24\,961 : 71$.

Solução. Arredondamos 71 por 70 e 24 961 por 21 000, o múltiplo de 70 **mais próximo** e **menor** que 24 961. O quociente estimado é $21\,000 : 70 = 300$. Agora, arredondamos a diferença $24\,961 - 21\,000 = 3\,961$ para 3 500, o múltiplo de 70 mais próximo e menor que 3.961. Dividindo 3 500 por 70, obtemos 50. Logo, melhoramos a estimativa do quociente para $300 + 50 = 350$. Podemos resumir estas contas, escrevendo-as da seguinte forma

$$24\,961 : 71 \approx (21\,000 + 3\,500) : (70) = 300 + 50 = 350,$$

onde o símbolo $\approx$ significa "aproximadamente". Observe que o quociente exato é 351, com resto igual a 40. ■

3.7 – Múltiplos e divisores

Fixemos um número natural, por exemplo, 3. Somando parcelas iguais a 3, obtemos todos os seus *múltiplos*:

$$\begin{aligned} 1 \times 3 &= 3, \\ 2 \times 3 &= 3 + 3 = 6, \\ 3 \times 3 &= 3 + 3 + 3 = 9, \\ 4 \times 3 &= 3 + 3 + 3 + 3 = 12, \end{aligned}$$

e assim por diante. Já tínhamos visto esses múltiplos na tabuada. Agora, vamos representá-los na **reta numérica** da seguinte forma:

Incluímos o 0, que também é um múltiplo de 3, pois $0{\times}3 = 0$. Esta lista de múltiplos é **infinita**! De fato, todos os números da forma

$$n{\times}3 = \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{n \text{ vezes}}$$

são múltiplos de 3. No último produto acima, a letra n representa um número natural qualquer, isto é, n pode ser igual a $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ Ao efetuar os sucessivos produtos $n{\times}3$, construímos a linha da tabuada de multiplicação do número 3. Dizemos, ainda, que 3 é um *divisor* ou *submúltiplo* (ou *fator*) dos números $0, 3, 6, 9, \ldots$, da forma $n{\times}3$.

Observe que os múltiplos de três são pontos na reta, espaçados um do outro por uma distância sempre igual a 3. Assim, "pulamos" de ponto em ponto, da esquerda para a direita, somando 3 repetidamente.

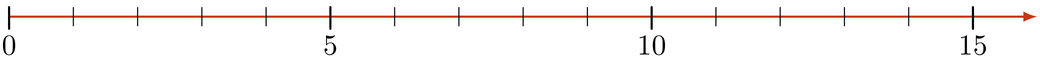
De modo similar, os múltiplos de 5 são os números da forma

$$n{\times}5 = \underbrace{5 + 5 + \ldots + 5}_{n \text{ vezes}},$$

onde n é um número natural. Por exemplo, os números

$$\begin{aligned} 0{\times}5 &= 0, \\ 1{\times}5 &= 5, \\ 2{\times}3 &= 5 + 5 = 10, \\ 3{\times}5 &= 5 + 5 + 5 = 15 \end{aligned}$$

são múltiplos de 5, os quais podem ser representados na reta como segue:



Na reta acima, os números marcados estão espaçados por distâncias sempre iguais a 5. Assim, "avançamos" de 5 em 5, determinando os sucessivos múltiplos de 5. Neste caso, observamos que 5 é um *divisor* ou *submúltiplo* (ou *fator*) comum a todos os números $0, 5, 10, 15, \ldots$, da forma $n{\times}5$.

Em resumo, dizemos que 90 é um **múltiplo** de 3 (ou, equivalentemente, que 3 é **fator** ou **divisor** de 90), pois

$$90 = 3{\times}30,$$

ou seja,

$$\frac{90}{3} = 90 : 3 = 30.$$

Da mesma forma, dizemos que 5 é **fator** ou **divisor** de 90 (ou, equivalentemente, que 90 é **múltiplo** de 5), uma vez que

$$\frac{90}{5} = 90 : 5 = 18,$$

ou seja,

$$90 = 5{\times}16.$$

Em ambos os exemplos, temos *divisões exatas*, isto é, com resto igual a zero.

Uma forma de determinar múltiplos e divisores e de explicar essas divisões exatas é a **fatoração**: fatorar um dado número significa escrevê-lo como produto de seus divisores ou *fatores*. Por exemplo, temos:

$$\begin{aligned} 90 &= 2{\times}45 \\ &= 2{\times}3{\times}15 \\ &= 2{\times}3{\times}3{\times}5. \end{aligned}$$

Note que a sequência de fatorações para na terceira linha, pois os números 2, 3 e 5 já "não podem" mais ser divididos: de modo mais claro, cada um desses números tem como divisores apenas o número 1 e o próprio número. São exemplos de **números primos**.

Um número natural é *primo* quando tem exatamente dois fatores positivos: o número 1 e o próprio número, necessariamente. Alguns exemplos de números primos são $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$, bem como os números 1 597 e 2 147 483 647 (como verificar?). Observe que o número 1 *não é primo*, pois tem um único fator positivo, o próprio número 1. Um número *composto* é um número natural, diferente de 0 e 1, que não é primo. Por exemplo, $6 = 2\times 3$ é um número composto.

Portanto, concluímos que o número 90 é fatorado em seus *fatores primos* da seguinte forma, que é única, a menos da ordem dos fatores:

$$90 = 2\times 3\times 3\times 5.$$

Esta fatoração explica as divisões *exatas* de 90 por seus divisores ou fatores. De fato, temos:

$$\frac{90}{3} = \frac{2\times 3\times 3\times 5}{3} = 2\times 3\times 5 = 30.$$

De forma similar, calculamos:

$$\frac{90}{5} = \frac{2\times 3\times 3\times 5}{5} = 2\times 3\times 3 = 18.$$

Além dos fatores primos 2, 3 e 5, o número 90 tem outros fatores ou divisores de 90, *compostos* por esses fatores primos, a saber,

$$\begin{aligned}
&2\times 3 = 6,\ \ 2\times 5 = 10,\ \ 3\times 3 = 9,\ \ 3\times 5 = 15,\\
&2\times 3\times 3 = 18,\ \ 2\times 3\times 5 = 30,\ \ 3\times 3\times 5 = 45,\\
&2\times 3\times 3\times 5 = 90.
\end{aligned}$$

Observe que os todos os divisores de 90 **devem ter fatores iguais** aos fatores de 90: um número que tiver um fator diferente dos fatores de 90 não pode ser um divisor de 90. Além disso, cada um destes fatores aparece no divisor, no máximo, o mesmo número de vezes em que aparece em 90. Por exemplo, temos:

$$\frac{90}{15} = \frac{2\times 3\times 3\times 5}{3\times 5} = 2\times 3 = 6 \qquad \text{e} \qquad \frac{90}{18} = \frac{2\times 3\times 3\times 5}{2\times 3\times 3} = 5.$$

No entanto, observe que $12 = 2\times 2\times 3$ tem 2 fatores iguais a 2 e não apenas 1, como 90. Logo,

$$\frac{90}{12} = \frac{2\times 3\times 3\times 5}{2\times 2\times 3}$$

não é uma divisão exata, ou seja, tem resto diferente de zero. Vejamos:

$$\frac{90}{12} = \frac{84+6}{12} = 7 + \frac{6}{12},$$

o que é uma forma de escrever

$$90 = 12\times 7 + 6.$$

Para fixar esses fatos, vejamos mais um exemplo, fatorando, agora, o número 675, ou seja, escrevendo esse número como produto de seus divisores ou *fatores*:

$$\begin{aligned}
675 &= 3\times 225\\
&= 3\times 3\times 75\\
&= 3\times 3\times 3\times 25\\
&= 3\times 3\times 3\times 5\times 5.
\end{aligned}$$

Aqui, também, a fatoração para com esses fatores 3 e 5, que já não podem ser divididos em outros fatores menores, além de 1. Obtivemos, deste modo, a fatoração de 675 em *fatores primos*. Uma vez que

$$675 = 3\times 3\times 3\times 5\times 5,$$

observamos que $3\times 3\times 5 = 45$ é um divisor de 675. No entanto, $5\times 5\times 5 = 125$ não é divisor de 675, visto que tem 3 fatores iguais a 5, enquanto 675 tem apenas 2 fatores iguais a 5. De fato,

$$\frac{675}{125} = \frac{625+50}{125} = 5 + \frac{50}{125},$$

o que pode ser escrito na forma da divisão euclidiana

$$675 = 125\times 5 + 50.$$

> **Observação 3.2** A existência da fatoração de um número natural maior que 1 em *fatores primos* (única, a menos da ordem dos fatores) é assegurada pelo chamado **Teorema Fundamental da Aritmética**, apresentado pelo matemático grego Euclides (que viveu entre os séculos III e II a.C.) em sua célebre obra *Os Elementos*.

Múltiplos e divisores comuns

Observamos que 15 é um múltiplo *comum* de 3 e de 5: de fato, foi marcado tanto na reta dos múltiplos de 3 como na dos múltiplos de 5, como vimos na seção anterior. Estendendo as listas dos múltiplos de 3 e de 5, encontraremos outros múltiplos comuns a esses dois números. Vejamos: os primeiros múltiplos de 3 são

$$0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, \ldots,$$

enquanto os primeiros múltiplos de 5 são

$$0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, \ldots.$$

Perceba que, na lista dos múltiplos de 3, a cada **cinco** números encontramos um valor que também é múltiplo de 5: encontramos 0, 15, 30, 45, e assim por diante. Por outro lado, na lista dos múltiplos de 5 (ver acima), a cada **três** números, encontramos um múltiplo de 3. E os múltiplos encontrados são os mesmos que no caso anterior: 0, 15, 30, 45, e assim por diante. Esses números são os *múltiplos comuns* de 3 e 5.

O menor múltiplo comum positivo (diferente de 0, portanto) dos números 3 e 5 é 15; dizemos que esse número é o *mínimo múltiplo comum* ou MMC de 3 e 5. Nesse exemplo (mas não sempre, como veremos), o MMC é dado pelo produto de 3 e 5, ou seja,

$$\text{MMC}(3, 5) = 15 = 3\times 5.$$

Usando o mesmo processo descrito acima (isto é, comparando os múltiplos sucessivos de dois números para encontrar seu MMC), obtemos $\text{MMC}(7, 10) = 70$. De fato, os múltiplos positivos de 7 são:

$$7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, \ldots$$

E os múltiplos positivos de 10 são:

$$10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, \ldots$$

Com o mesmo argumento, podemos comprovar que $\text{MMC}(3, 20) = 60$ e $\text{MMC}(9, 11) = 99$. Para todos esses pares de números acima, seus respectivos mínimos múltiplos comuns são iguais a seus produtos. Porém, esta **não** é uma regra geral (um teorema, deveríamos dizer). De fato, vejamos o que ocorre com os múltiplos de 6 e 15. Os múltiplos de 6 são

$$0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, \ldots,$$

enquanto os múltiplos de 15 são

$$0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, \ldots$$

Assim, vemos que o mínimo múltiplo comum de 6 e 15 é 30, e não $6\times 15 = 90$. Dessa forma, o mínimo múltiplo comum de dois números **nem sempre** é igual a seu produto. Uma forma de explicar isso é observar a *fatoração* dos números 6 e 15, ou seja, escrevermos esses números como produtos de seus divisores ou fatores. Temos:

$$6 = 2\times 3 \qquad \text{e} \qquad 15 = 5\times 3.$$

Ou seja, 6 e 15 são ambos múltiplos de 3. Isto é, 3 é um divisor comum de 6 e 15. Logo, qualquer múltiplo de 6 e de 15 é também múltiplo de 3. Por exemplo, o produto de 6 e 15

$$90 = 6\times 15 = 2\times 3\times 5\times 3 = 2\times 5\times 3\times 3$$

é múltiplo comum desses dois números. Mas, podemos encontrar um múltiplo comum de 6 e 15 *menor* que seu produto, bastando suprimir um dos fatores iguais a 3. Obtemos, assim,

$$2\times5\times3 = 30.$$

Concluímos que 30 é o *mínimo múltiplo comum* de 6 e 15, pois eliminamos o fator 3 "a mais" e não há como eliminar outros além desse. Para reforçar o entendimento, calculemos, agora, o MMC de 12 e 18. O produto desses dois números,

$$12\times18 = 216,$$

é um múltiplo comum dos dois, mas não é o *mínimo múltiplo comum*. De fato, podemos *fatorar* 12 e 18, obtendo:

$$12 = 2\times2\times3,$$
$$18 = 2\times3\times3.$$

Lembre-se que *fatorar* significa escrever um número como produto de seus divisores. A partir desta fatoração, observamos que *qualquer* múltiplo comum de 12 e 18 deve ter pelo menos 2 fatores iguais a 2 e 2 fatores iguais a 3. Ou seja, qualquer múltiplo comum de 12 e 18 deve ser múltiplo de

$$2\times2\times3\times3 = 36.$$

Este é o *mínimo* múltiplo comum de 12 e 18, isto é, $\text{MMC}(12, 18) = 36$. De fato, com 2 fatores iguais a 2 e 2 fatores iguais a 3, temos:

$$2\times2\times3\times3 = 12\times3,$$
$$2\times2\times3\times3 = 2\times18.$$

Observe que o produto de 12 e 18 seria *fatorado* como

$$216 = 12\times18 = 2\times2\times2\times3\times3\times3,$$

ou seja, teríamos 3 fatores iguais a 2 e 3 fatores iguais a 3. Eliminando um fator 2 e um fator 3, obtemos o *mínimo múltiplo comum*:

$$\frac{216}{6} = \frac{2\times2\times2\times3\times3\times3}{2\times3} = 2\times2\times3\times3 = 36.$$

Para finalizar e fixar ideias, discutamos mais um exemplo: o MMC de 90 e 675. Lembremos que as fatorações desses números em *fatores primos* são dadas por

$$90 = 2\times3\times3\times5,$$
$$675 = 3\times3\times3\times5\times5.$$

Portanto, qualquer múltiplo comum a 90 e 675 deve ter, *pelo menos*, 1 fator igual a 2, 3 fatores iguais a 3 e 2 fatores iguais a 5, isto é, deve ter, no mínimo, o fator

$$2\times3\times3\times3\times5\times5 = 1\,350.$$

Este é o *mínimo múltiplo comum* de 90 e 675, ou seja, $\text{MMC}(90, 675) = 1\,350$. Perceba que o produto de 90 e 675

$$90\times675 = (2\times3\times3\times5)\times(3\times3\times3\times5\times5) = 2\times3\times3\times3\times3\times3\times5\times5\times5$$

não é o mínimo múltiplo comum desses dois números. De fato, para obter o MMC de 90 e 675, devemos "eliminar" 2 fatores iguais a 3 e 1 fator igual a 5 do produto, obtendo

$$\frac{2\times3\times3\times3\times3\times3\times5\times5\times5}{3\times3\times5} = 2\times3\times3\times3\times5\times5 = 1\,350 = \text{MMC}(90, 675).$$

Observe que o número $3\times3\times5 = 45$ é um *divisor comum* de 90 e 675. De fato, é o maior ou *máximo divisor comum* de 90 e 675, o que denotamos por

$$\text{MDC}(90{,}675) = 45.$$

Logo, neste caso,

$$\frac{90\times675}{\text{MDC}(90,675)} = \text{MMC}(90,675). \tag{3.1}$$

Esses exemplos são apenas casos particulares dos seguintes **teoremas**, isto é, de duas afirmações matemáticas que são válidas para todos os casos e que podem ser *demonstradas* a partir de *premissas* básicas.

Teorema: o MMC de dois números é igual a seu produto se, e somente se, o único divisor ou fator (positivo) comum aos dois números é o número 1.

Teorema: o MMC e o MDC de dois números naturais m e n, diferentes de zero, estão relacionados da seguinte forma

$$\frac{m\times n}{\text{MDC}(m,n)} = \text{MMC}(m,n) \tag{3.2}$$

ou, equivalentemente,

$$m\times n = \text{MMC}(m,n)\times \text{MDC}(m,n). \tag{3.3}$$

Problema 19 Sara foi escrevendo nas casas de um tabuleiro 95 por 95 os múltiplos positivos de 4, em ordem crescente, conforme a figura a seguir.

4	8	12	16	20	...	376	380
760	756	752	748	744	...	388	384
764	→	→	→	→	...	→	→
←	←	←	←	←	...	←	←
⋮							
							U

Qual o número que Sara escreveu na posição da letra U?

O tabuleiro contém $95\times95 = 9\,025$ casas. Nas linhas ímpares, a sequência é crescente e nas linhas pares, é decrescente. Portanto, na 95^a linha, a última casa da direita apresenta o maior múltiplo de 4 no tabuleiro, ou seja, Sara escreveu na casa U o número $9\,025\times4 = 36\,100$.

Um método russo de multiplicação

Descreveremos, a seguir, um método de multiplicação utilizado por camponeses russos, que depende apenas da tabuada de multiplicação por 2. Ele consiste dos seguintes passos:

1) Registram-se os dois fatores da multiplicação em duas colunas, colocando o menor fator na coluna da direita e o maior fator na coluna da esquerda.
2) O número da coluna da esquerda é sucessivamente dividido por dois, sempre arredondando o resultado para baixo quando a divisão não for exata, até obtermos o número 1.
3) De modo simultâneo ao passo anterior, multiplica-se o número da coluna da direita sucessivamente por dois até a linha que coincida com o número 1 obtido nas divisões na coluna da esquerda.
4) Finalmente, as linhas que começam por números pares na coluna da esquerda devem ser descartadas e os números restantes da coluna da direita devem ser somados. O resultado da soma é o produto procurado.

Vejamos alguns exemplos práticos do algoritmo anterior antes da investigação sobre o porquê dele funcionar.

$$\begin{array}{r|l} 19 & 15 \\ 9 & 30 \\ \cancel{4} & \cancel{60} \\ \cancel{2} & \cancel{120} \\ 1 & 240 \end{array}$$

Como 4 e 2 são números pares, as linhas que os contém devem ser descartadas. Agora somamos os números que sobraram na coluna da direita:

$$15 + 30 + 240 = 285 = 19\times 15.$$

Para entender como a soma anterior produziu o produto 19×15, perceba que todas as parcelas da soma são múltiplos de 15:

$$15 = 15\times 1, \quad 30 = 15\times 2 \quad \text{e} \quad 240 = 15\times 16.$$

Por outro lado, o que acontece quando somamos os números 1, 2 e 16? Temos:

$$1 + 2 + 16 = 19.$$

Com isso, podemos reescrever a soma gerada pelo algoritmo como:

$$15\times 19 = 15\times(1 + 2 + 16) = 15 + 30 + 240.$$

Vejamos mais um exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 51 & 19 \\ 25 & 38 \\ \cancel{12} & \cancel{76} \\ \cancel{6} & \cancel{152} \\ 3 & 304 \\ 1 & 608 \end{array}$$

Assim,

$$51\times 19 = 19 + 38 + 304 + 608 = 19\times(1 + 2 + 16 + 32).$$

O algoritmo funciona apenas baseado na tabuada de 2 porque estamos decompondo um fator da coluna da esequerda como somas de parcelas da lista de *potências de* 2:

$$1, \ 2, \ 4, \ 8, \ 16, \ 32, \ldots,$$

em que cada número é o dobro do anterior. É possível mostrarmos que todo número natural pode ser decomposto em *potências de* 2, aplicando divisões sucessivas por 2, assim como no algoritmo anterior. Por exemplo, considere as seguintes divisões sucessivas de 87 por 2:

$$\begin{aligned} 87 &= 2\times 43 + 1 \\ 43 &= 2\times 21 + 1 \\ 21 &= 2\times 10 + 1 \\ 10 &= 2\times 5 + 0 \\ 5 &= 2\times 2 + 1 \\ 2 &= 2\times 1 + 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 87 &= 2\times 43 + 1 \\ &= 2\times(2\times 21 + 1) + 1 \\ &= 2\times(2\times(2\times 10 + 1) + 1) + 1 \\ &= 2\times(2\times(2\times(2\times 5 + 0) + 1) + 1) + 1 \\ &= 2\times(2\times(2\times(2\times(2\times 2 + 1) + 0) + 1) + 1) + 1 \\ &= 2\times(2\times(2\times(2\times(2\times(2\times 1 + 0) + 1) + 0) + 1) + 1) + 1. \end{aligned}$$

Para simplificar a expressão, na última linha, usamos a notação das *potências de* 2, em que escrevemos:

$$
\begin{aligned}
2^0 &= 1,\\
2^1 &= 2,\\
2^2 &= 2\times 2,\\
2^3 &= 2\times 2\times 2,\\
2^4 &= 2\times 2\times 2\times 2,
\end{aligned}
$$

e, em geral,

$$2^n = \underbrace{2\times 2\times \ldots \times 2}_{n \text{ vezes}}.$$

Com esta notação, concluímos que

$$87 = 1 + 2\times(1 + 2\times(1 + 2\times(0 + 2\times(1 + 2\times(0 + 2\times 1))))),$$

expressão que escrevemos, resumidamente, como:

$$87 = 1 + 1\times 2 + 1\times 2^2 + 0\times 2^3 + 1\times 2^4 + 0\times 2^5 + 1\times 2^6, \tag{3.4}$$

ou seja,

$$87 = 1 + 2 + 4 + 16 + 64.$$

A expressão (3.4) é a decomposição do número 87 no sistema de numeração binário, que usa apenas os algarismos 0 e 1. Temos

$$87 = 1110101,$$

igualdade em cujo lado esquerdo, temos a representação decimal e, do lado direito, temos a representação binária.

> Essa representação binária dos números naturais tem um importante papel para o armazenamento de informações em computadores, dentre outros usos em nosso quotidiano.

Exercício 3.1 Complete o diagrama abaixo com os números que faltam para realizar a multiplicação de 25 por 18 pelo algoritmo russo.

$$
\begin{array}{r|l}
25 & 18\\
\cancel{12} & \cancel{\triangle}\\
\cancel{\square} & \cancel{72}\\
3 & 144\\
1 & 288
\end{array}
$$

Solução. Devemos ter $\triangle = 36$ e $\square = 6$. Assim

$$25\times 18 = 18 + 144 + 288 = 450.$$

■

3.8 – Exercícios resolvidos e propostos

Sequência 1

Exercício 3.2 Calcule os seguintes produtos:

(*a*) 5×3 (*b*) 3×5 (*c*) 50×3 (*d*) 50×30 (*e*) 53×35 (*f*) 55×35

Solução. a) Lembre que 5×3 representa a soma de 5 parcelas iguais a 3:

$$3+3+3+3+3=15.$$

b) Da mesma forma, o produto 5×3 representa a soma de 3 parcelas iguais a 5:

$$5+5+5=15.$$

Observe que

$$5\times 3=3\times 5,$$

conforme representado nas seguintes figuras:

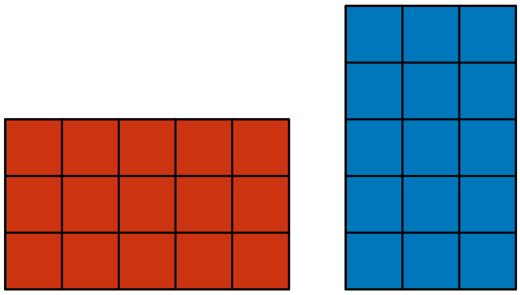


Figura 3.3: 3×5, com 3 linhas de 5 blocos; e 5×3, com 5 linhas de 3 blocos

Outra forma de representar os produtos 3×5 e 5×3, usando barras, é a seguinte:

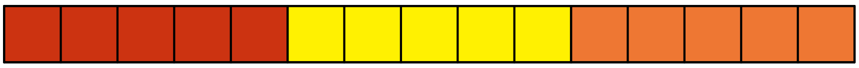


Figura 3.4: 3×5, com 3 barras de 5 blocos

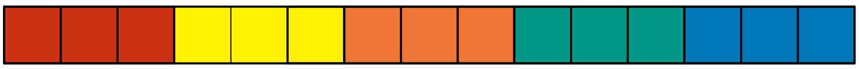


Figura 3.5: 5×3, com 5 barras de 3 blocos

c) Temos $50\times 3=10\times 5\times 3=10\times 15=150.$
d) Temos $50\times 30=10\times 10\times 5\times 3=100\times 15=1\,500.$
e) Temos $53\times 35=(50+3)\times(30+5)=50\times 30+50\times 5+3\times 30+3\times 5=1\,500+250+90+15=1\,750+105=1\,855.$ Uma forma de representar esta conta é a seguinte:

$$\begin{array}{r} 5\,3 \\ \times\,3\,5 \\ \hline 1\,5 \\ 9\,0 \\ 2\,5\,0 \\ +\,1\,5\,0\,0 \\ \hline 1\,9\,2\,5 \end{array}$$

f) Representamos a conta, usando o dispositivo prático:

$$\begin{array}{r} 50+5 \\ \times \qquad 30+5 \\ \hline 200+50+25 \\ +1\,500+100+50 \\ \hline 1\,000+800+120+5 \end{array}$$

Logo, $55{\times}35 = 1\,925$. Esse dispositivo pode ser escrito de modo mais resumido do seguinte modo:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ {\scriptstyle 2} \\ 5\,5 \\ \times\,3\,5 \\ \hline 2\,7\,5 \\ +\,1\,6\,5\,0 \\ \hline 1\,9\,2\,5 \end{array}$$

■

Exercício 3.3 Calcule os seguintes quocientes:

(a) $15 \div 3$ (b) $150 \div 30$ (c) $1\,855 \div 35$ (d) $1\,879 \div 35$

Solução. a) Temos $15 \div 3 = (5+5+5) : 3 = 5$, uma vez que $15 = 3{\times}5 = 5+5+5$. As figuras abaixo representam essa divisão:

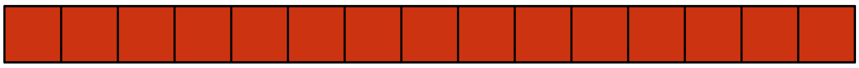


Figura 3.6: 15 blocos

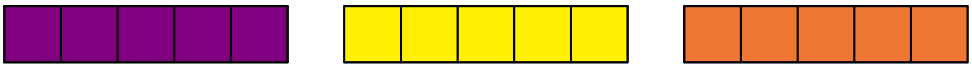


Figura 3.7: $15 \div 3$, ou seja, 3 barras de 5 blocos

b) Representamos a divisão de 150 por 30, isto é, $150 : 30$, da seguinte forma:

$$\frac{150}{30}.$$

Temos

$$\frac{150}{30} = \frac{15{\times}10}{3{\times}10} = \frac{15}{3} = 5.$$

É fundamental entender a razão pela qual esses cálculos funcionam: observe que dividir 150 por 30 significa dividir 150 por 10 e, em seguida, por 3, visto que $30 = 10{\times}3$. Assim

$$\frac{150}{30} = \frac{150:10}{3} = \frac{15}{3} = 5\cdot$$

Ou seja,

$$\frac{150}{30} = \frac{150:10}{30:10} = \frac{15}{3} = 5.$$

Intuitivamente, isto significa que, dividindo, por exemplo, 15 reais por 3 pessoas tem o mesmo resultado que dividindo 10 vezes mais dinheiro (isto é, 150 reais) por 10 vezes mais pessoas (isto é, 30 pessoas)!
c) Calculamos:

$$1\,855 = 1\,850 + 5 = \underbrace{50{\times}35}_{=1\,750} + 100 + 5 = 50{\times}35 + 105 = 50{\times}35 + 3{\times}35 = 53{\times}35.$$

Usando o dispositivo prático ("método da chave"), representamos esses cálculos do seguinte modo:

$$\begin{array}{r|l} 1\ 8\ 5\ 5 & 3\ 5 \\ \cline{2-2} -\,1\ 7\ 5 & 5\ 3 \\ \cline{1-1} 1\ 0\ 5 & \\ -\,1\ 0\ 5 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Concluímos que

$$1\,855 \div 35 = 53.$$

Portanto $1\,855 = 53{\times}35$ e, assim,

$$1\,855 \div 53 = 35.$$

d) Note que

$$1\,879 = 1\,855 + 24 = 53{\times}35 + 24.$$

Logo, ao dividir $1\,879$ por 35 obtemos *quociente* 53 e *resto* 24, ou seja,

$$\frac{1\,879}{35} = 53 + \frac{24}{35}.$$

Usando o dispositivo prático ("método da chave"), representamos esses cálculos do seguinte modo:

$$\begin{array}{r|l} 1\;8\;7\;9 & \;3\;5 \\ \cline{2-2} -\underline{1\;7\;5} & \;5\;3 \\ 1\;2\;9 & \\ -\underline{1\;0\;5} & \\ 2\;4 & \end{array}$$

■

Exercício 3.4 Calcule os seguintes produtos:

(a) $50{\times}16$ $\quad$ (b) $52{\times}16$ $\quad$ (c) $52{\times}18$ $\quad$ (d) $520{\times}160$

Solução. Temos $50{\times}16 = 50{\times}2{\times}8 = 100{\times}8 = 800$. Assim,

$$52{\times}16 = (50+2){\times}16 = 50{\times}16 + 2{\times}16 = 800 + 32 = 832.$$

Da mesma forma,

$$52{\times}18 = 52{\times}(16+2) = 52{\times}16 + 52{\times}2 = 832 + 104 = 936.$$

Além disso, $520{\times}160 = 52{\times}16{\times}10{\times}10 = 832{\times}100 = 83\,200$. ■

Exercício 3.5 Calcule os seguintes produtos usando diferentes estratégias:

(a) $2020{\times}2020$ $\quad$ (b) $2019{\times}2021$ $\quad$ (c) $365{\times}24$ $\quad$ (d) $99{\times}999$

Solução. a) Temos

$$\begin{aligned} 2020{\times}2020 &= (2000+20){\times}(2000+20) \\ &= 2000{\times}2000 + 2000{\times}20 + 20{\times}2000 + 20{\times}20 \\ &= 4\,000\,000 + 80\,000 + 400 = 4\,080\,400. \end{aligned}$$

b) Agora,

$$\begin{aligned} 2019{\times}2021 &= (2020-1){\times}(2020+1) \\ &= 2000{\times}2000 + \cancel{2020{\times}1} - \cancel{1{\times}2020} - 1{\times}1 \\ &= 2020{\times}2020 - 1 = 4\,080\,400 - 1 = 4\,080\,399. \end{aligned}$$

c) Podemos calcular este produto da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 365{\times}24 &= 360{\times}24 + 5{\times}24 = 12{\times}30{\times}12{\times}2 + 10{\times}12 \\ &= 144{\times}2{\times}30 + 120 = 288{\times}30 + 120 = 8\,640 + 120 = 8\,760. \end{aligned}$$

De outro modo, calculamos:

$$\begin{aligned}365\times24 &= 365\times2\times12 = (600+130)\times12 = 7\,200 + 130\times12\\ &= 7\,200 + 120\times12 + 10\times12 = 7\,200 + 1\,440 + 120\\ &= 7\,200 + 1\,560 = 8\,760.\end{aligned}$$

d) Desta vez, calculamos:

$$\begin{aligned}99\times999 &= 99\times(1000-1) = 99\,000 - 99 = 90\,000 + 9\,000 - 99\\ &= 90\,000 + 8\,900 + 100 - 99 = 90\,000 + 8\,900 + 1 = 98\,901,\end{aligned}$$

resultado que pode ser obtido também da seguinte forma:

$$\begin{aligned}99\times999 &= (100-1)\times999 = 99\,900 - 999 = 99\,000 - 99\\ &= 98\,900 + 100 - 99 = 98\,900 + 1 = 98\,901.\end{aligned}$$

■

Exercício 3.6 Efetue as seguintes divisões usando diferentes estratégias:

(a) 40044 : 6 (b) 40046 : 6 (c) 40044 : 12 (d) 40046 : 39

Solução. a) Temos:

$$\begin{aligned}40044 &= 36000 + 4000 + 44 = 36000 + 3600 + 400 + 44\\ &= 36000 + 3600 + 360 + 40 + 44\\ &= 36000 + 3600 + 360 + 36 + 4 + 44\\ &= 36000 + 3600 + 360 + 36 + 48\\ &= 6\times6000 + 6\times600 + 6\times60 + 6\times6 + 6\times8\\ &= 6\times(6000 + 600 + 6 + 8) = 6\times6674.\end{aligned}$$

b) Com isto, calculamos

$$40046 = 40044 + 2 = 6\times6674 + 2,$$

uma divisão não exata com quociente 6674 e resto 2.

c) Observe que $12 = 6\times2$. Assim, dividir 40044 por 12 significa dividir inicialmente por 6 e, em seguida, dividir o resultado por 2. Assim

$$\frac{40044}{12} = \frac{6\times6674}{6\times2} = \frac{6674}{2} = 3337.$$

Podemos obter este resultado diretamente, calculando, como antes

$$\begin{aligned}40044 &= 36000 + 3600 + 360 + 36 + 48\\ &= 12\times3000 + 12\times300 + 12\times30 + 12\times3 + 12\times4\\ &= 6\times(3000 + 300 + 30 + 7) = 6\times3337.\end{aligned}$$

Uma terceira forma de calcular esta divisão é observar que $12 = 4\times3$: dividimos 40044 por 4, obtendo 10011 e, em seguida, dividimos este resultado por 3, obtendo

$$\begin{array}{rrrrrr|l} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ \hline - & 9 & & & & & 3\,3\,3\,7 \\ & 1 & 0 & & & & \\ & - & 9 & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & - & 9 & & & \\ & & & 2 & 1 & & \\ & & - & 2 & 1 & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

■

Exercício 3.7 Estime os seguintes produtos, arredondando os fatores:

(a) 51×14 (b) 51×18 (c) 523×188 (d) $5\,239\times186$

Solução. a) Arrendondamos 51 para 50 e 14 para 15, obtendo a seguinte estimativa para o produto 51×14

$$51\times14 \approx 50\times15 = 750.$$

Lembre que o símbolo $\approx$ significa "aproximadamente".

b) Agora, arredondamos 51 para 50 e 18 para 20, obtendo a estimativa

$$51\times18 \approx 50\times20 = 1\,000.$$

c) Arredondando 523 para 520 e 188 para 190, aproximamos o produto 523×186 da seguinte forma:

$$523\times188 \approx 520\times190 = 52\times19\times100 = (52\times20-52)\times100 = (1\,040-52)\times100 = 988\times100 = 98\,800.$$

d) Arredondando 5 239 para 5 200 e 188 para 200, aproximamos o produto $5\,239\times188$ por

$$5\,239\times188 \approx 5\,200\times200 = 52\times2\times10\,000 = 104\times10\,000 = 1\,040\,000.$$

Uma melhor aproximação pode ser obtida, arredondando 5 239 para 5 240 e 188 para 190. Sendo assim, estimamos o produto por

$$\begin{aligned}5\,239\times188 &\approx 5\,240\times190 = 524\times19\times100 = (520\times19+4\times19)\times100 = (9\,880+76)\times100 = 9\,956\times100\\ &= 995\,600.\end{aligned}$$

■

Exercício 3.8 Calcule mentalmente os seguintes produtos, usando arredondamentos e estimativas:

(a) 52×24 (b) 58×18 (c) 24×24 (d) 39×19

Exercício 3.9 Calcule mentalmente os seguintes produtos, usando arredondamentos e estimativas:

(a) 52×24 (b) 58×18 (c) 24×24 (d) 39×19

Exercício 3.10 Uma sala de cinema tem 12 filas com 11 assentos e 8 filas com 9 assentos. Quantos assentos há ao todo nesta sala?

(a) 40
(b) 132
(c) 204
(d) 391
(e) 400

Solução. A quantidade total de assentos é dada por

$$\underbrace{12\times11}_{\text{12 filas com 11 assentos}} + \underbrace{8\times9}_{\text{8 filas com 9 assentos}}$$

Assim, temos:

$$12\times11+8\times9 = 132+72 = 204 \text{ assentos},$$

o que corresponde à alternativa (c). ■

Exercício 3.11 Uma sala de cinema tem 12 filas com 11 assentos e 8 filas com 9 assentos. Sabendo que um ingresso custa R$ 15,00, qual o total arrecadado pelo cinema em uma sessão com a sala cheia?

Solução. O valor total arrecadado pelo cinema, com esta sessão, é igual a

$$15\times(12\times 11+8\times 9)=15\times(132+72)=15\times 204=30\times 102=30\times 100+30\times 2=3\,000+60=3\,060 \text{ reais.}$$

■

Exercício 3.12 Se, além do ingresso, cada pessoa nessa sessão comprou um *combo* de água mineral e pipoca a um preço de R$ 5,00, qual a receita do cinema em uma sessão com a sala cheia?

Solução. A despesa de cada pessoa, neste sessão de cinema, é igual a

$$15+5=20 \text{ reais.}$$

Como há 204 pessoas na sessão, a receita total do cinema, incluindo ingressos e os *combos*, é dada por

$$20\times 204=2\times 10\times 204=2\times 2\,040=4\,080 \text{ reais.}$$

■

Exercício 3.13 O cinema estocou garrafinhas de água mineral em 6 geladeiras, cada uma com capacidade para 420 garrafinhas. Sabendo que não houve espaço para guardar 137 garrafinhas nas geladeiras, quantas garrafinhas, ao todo, o cinema estocava?

Exercício 3.14 Uma grande escola organizou seus alunos do Ensino Médio em 18 turmas de 35 alunos. Se fossem igualmente agrupados em 15 turmas, quantos alunos haveria por turma?

Solução. O número total de alunos é dado por

$$18\times 35=6\times 3\times 5\times 7=15\times 6\times 7=15\times 42.$$

Portanto, os alunos podem ser reagrupados em 15 turmas com 42 alunos cada. Note que não é preciso efetuar o produto para resolvermos o problema! De todo modo, temos, facilmente $18\times 35=9\times 2\times 35=9\times 70=630$ alunos. ■

Exercício 3.15 Num ponto turístico, é oferecido passeio de balão aos visitantes. Em cada viagem, o balão leva 6 pessoas. Cada pessoa paga R$24 pelo passeio. Quantos reais ganhará o baloneiro se fizer 15 passeios com o balão lotado?

a) R$ 149
b) R$ 367
c) R$ 457
d) R$ 2 160

Solução. Em cada passeio lotado, o baloneiro ganha $6\times 24=144$ reais. Como foram feitos 15 passeios com lotação total, ele ganhou $15\times 144=2\,160$ reais. Observe que, aqui, usamos a associatividade da multiplicação para calcular

$$24 \text{ reais} \times 6 \text{ pessoas} \times 15 \text{ passeios} =144\times 15=72\times 30=2\,160 \text{ reais.}$$

Note que a conta poderia ter sido feita como

$$24\times(6\times 15)=24\times 90=2\,160.$$

A resposta é a alternativa (d). ■

Exercício 3.16 Em uma divisão, o divisor é 29 e o quociente é igual a 15. Sabendo que o resto dessa divisão é o maior possível, qual é o valor do dividendo?

(a) 239. (b) 293. (c) 449. (d) 463. (e) 827.

Solução. Em uma divisão por 15, o maior resto possível é 14. Assim, o dividendo é igual a $15 \times 29 + 14$. Para calcular este valor, efetuamos estas operações da seguinte forma (que não é única):

$$15 \times 29 + 14 = 15 \times 29 + 15 - 1 = 15 \times 30 - 1 = 450 - 1 = 449$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (c). ■

Exercício 3.17 Carla ganhou de presente de aniversário o Jogo da Vida. Depois de jogar uma partida, ela somou suas notas e descobriu que tinha 6 050 reais. Como nesse jogo há somente notas de 100 reais, de 10 reais e de 1 real, Carla pode ter ganho:

(a) 6 notas de 100 reais e 5 notas de 1 real.
(b) 6 notas de 100 reais e 5 notas de 10 reais.
(c) 60 notas de 100 reais e 5 notas de 1 real.
(d) 60 notas de 100 reais e 5 notas de 10 reais.
(e) 600 notas de 10 reais e 50 notas de 10 reais.

Exercício 3.18 Uma empresa tem 50 funcionários. O gasto com cada funcionário é de R\$ 990,00 (salário) e mais R\$ 330,00 (cesta básica). Quanto essa empresa gasta com seus funcionários?

(a) R\$ 76 000,00
(b) R\$ 66 000,00
(c) R\$ 65 000,00
(d) R\$ 49 500,00
(e) R\$ 16 500,00

Solução. Podemos resolver o problema de diversas maneiras. Por exemplo, podemos começar somando os custos com cada funcionário, isto é, calculando

$$990 + 330 = 1\,320$$

e, em seguida, multiplicar o resultado por 50. Uma vez que $50 = 100 : 2$, temos

$$1\,320 \times 50 = 1\,320 \times 100 : 2 = 660 \times 100 = 66\,000 \text{ reais},$$

o que corresponde à alternativa (b). ■

Exercício 3.19 Em Borgeslândia, existe uma biblioteca com 50 070 livros disponíveis. Todos estão dispostos em estantes, que comportam 610 livros cada. Quantas estantes completamente cheias são necessárias para guardar todos esses livros? Quantos livros devem ficar na estante que não estará completa?

Solução. Apresentando a divisão 50 070 : 610 usando uma "chave", temos

$$\begin{array}{r|l} 5\,0\,0\,7\,0 & \underline{6\,1\,0} \\ -\,\underline{4\,8\,8\,0} & 8\,2 \\ 1\,2\,7\,0 & \\ -\,\underline{1\,2\,2\,0} & \\ 5\,0 & \end{array}$$

Para verificar estes cálculos, efetuamos a multiplicação do quociente do divisor, temos

$$\begin{aligned}82\times 610 + 50 &= 80\times 610 + 2\times 610 + 50 = 48\,800 + 1\,220 + 50\\ &= 48\,800 + 1\,270 = 50\,070.\end{aligned}$$

Concluímos que serão usadas 82 estantes completamente cheias (cada uma com 610 livros) e 1 estante com apenas 50 livros. ■

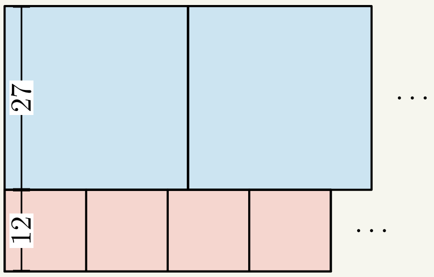
Exercício 3.20 Patrícia foi com mais quatro amigas a uma pizzaria e comeram uma pizza que custou R\$ 50,00 e outra pizza que custou R\$ 30,00. Para beber, cada menina pediu dois copos de suco de laranja. Cada copo de suco custou R\$ 5,00. Sabendo que Patrícia e suas amigas dividiram a conta igualmente, qual foi o valor pago por cada uma delas?

(a) R\$ 21,00
(b) R\$ 26,00
(c) R\$ 31,00
(d) R\$ 40,00
(e) R\$ 130,00

Exercício 3.21 Em uma fila para comprar ingressos para um jogo de futebol, havia 100 torcedores aguardando atendimento. Se 5 pessoas são atendidas a cada 3 minutos, qual a estimativa do tempo para o centésimo torcedor ser atendido?

(a) 30 minutos
(b) 40 minutos
(c) 50 minutos
(d) 60 minutos
(e) 61 minutos

Exercício 3.22 Para revestir uma região retangular, utilizamos placas quadradas de 27 centímetros de lado e placas quadradas menores, com 12 centímetros de lado, até que as laterais estejam perfeitamente alinhadas, conforme a seguinte figura sugere.



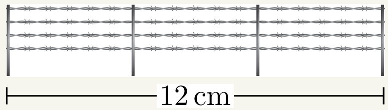
Qual será o comprimento dessa região retangular?

(a) 54 (b) 108 (c) 216 (d) 324

Solução. As placas estarão perfeitamente alinhadas pela *primeira vez* em um comprimento que seja o primeiro múltiplo comum de 12 e de 27 centímetros. Ou seja, o comprimento que buscamos é o *mínimo múltiplo comum* de $12 = 2\times 2\times 3$ e $27 = 3\times\times 3$, que é dado por 108. Isso corresponde a $108 : 27 = 4$ placas de lado maior alinhadas a $108 : 12 = 9$ placas de lado menor. ■

Exercício 3.23 Joaquim tem 120 postes de madeira para construir uma cerca. Sabe-se que os postes serão usados para cercar apenas um lado de seu sítio. Se cada quatro postes igualmente espaçados cercam 12 metros, usando-se todos os postes igualmente espaçados será possível fazer uma cerca de quantos metros?

(a) 476 m.
(b) 380 m.
(c) 357 m.
(d) 350 m.
(e) 320 m.



(imagem de vecteezy.com)

Exercício 3.24 A distância da casa de Roberto a sua escola é de 350 metros. Sabendo-se que ele vai e volta da escola a pé de segunda a sexta, quantos metros ele percorre por semana no trajeto casa-escola-casa, se ele sempre faz o mesmo caminho?

(a) 700 m
(b) 1400 m
(c) 1750 m
(d) 3500 m
(e) 7000 m

Exercício 3.25 O Sol tem diâmetro de 1.392.700 quilômetros e Júpiter é o maior planeta do Sistema Solar com diâmetro de 139.820 quilômetros. Qual a razão aproximada entre os diâmetros do Sol e de Júpiter?

(a) 1.000.000
(b) 10.000
(c) 1000
(d) 100
(e) 10

Solução. A razão entre os diâmetros de Júpiter e da Terra é aproximada por

$$\frac{1.392.700}{139.820} \approx \frac{139 \times 10000}{139 \times 1000} = 10.$$

■

Observação 3.3 Usaremos, alguma vezes, uma barra horizontal entre dois números para indicar a divisão de um pelo outro. Por exemplo

$$\frac{216}{8}$$

significa, nesse contexto, a divisão 216 : 8.

Exercício 3.26 Uma fábrica de bombons produziu 210 bombons de chocolate e 160 bombons de morango. Deseja-se embalar todos esses bombons em caixas com a mesma quantidade de bombons, sendo que cada caixa deve conter um único sabor de bombons. Sabendo que a quantidade de caixas utilizadas deve ser a menor possível, quantos bombons deverão ser colocados em cada caixa?

(a) 8 bombons
(b) 10 bombons
(c) 16 bombons
(d) 20 bombons
(e) 30 bombons

Sequência 2

Exercício 3.27 Calcule o valor das seguintes **expressões numéricas**:

1) $23{\times}34$
2) $23{\times}41$
3) $23{\times}(34+41)$
4) $(23+34){\times}41$
5) $(41-23){\times}34$
6) $49{\times}51$

Solução. 1) Temos:

$$23{\times}34 = (20+3){\times}(30+4) = 20{\times}30 + 20{\times}4 + 3{\times}30 + 3{\times}4 = 600+80+90+12 = 600+170+12 = 782.$$

2) Calculamos este produto do seguinte modo:

$$23{\times}41 = 23{\times}(40+1) = 23{\times}40 + 23{\times}1 = 20{\times}40 + 3{\times}40 + 23 = 800+120+23 = 943.$$

3) Podemos efetuar o cálculo de duas formas, pelo menos. Na primeira, usamos a distributividade e efetuamos as multiplicações e, em seguida, a adição:

$$\begin{aligned} 23{\times}(34+41) &= 23{\times}34 + 23{\times}41 \\ &= 782 + 943 \\ &= 1\,725. \end{aligned}$$

Outra forma de fazer as contas é iniciar pela adição e finalizar com a multiplicação, como a seguir:

$$\begin{aligned} 23{\times}(34+41) &= 23{\times}75 \\ &= (20+3){\times}75 \\ &= 20{\times}75 + 3{\times}75 \\ &= 1\,500 + 225 \\ &= 1\,725. \end{aligned}$$

4) Calculamos:

$$\begin{aligned} (23+34){\times}41 &= 23{\times}41 + 34{\times}41 \\ &= 943 + 1\,394 \\ &= 2\,337. \end{aligned}$$

5) Temos:

$$(41-23){\times}34 = 18{\times}34 = 612.$$

6) Por fim, calculamos:

$$\begin{aligned} 49{\times}51 &= (50-1){\times}(50+1) \\ &= 50{\times}50 + \cancel{50{\times}1} - \cancel{1{\times}50} - 1{\times}1 \\ &= 50{\times}50 - 1 \\ &= 2\,500 - 1 \\ &= 2\,499. \end{aligned}$$

■

Exercício 3.28 Calcule o quociente $756 \div 18$, usando, pelo menos, duas técnicas diferentes.

Solução. *Técnica 1*: usando o algoritmo euclidiano da divisão, temos:

$$\begin{aligned} 756 &= 750 + 6 \\ &= 720 + 30 + 6 \\ &= 18 \times 40 + 36 \\ &= 18 \times 40 + 18 \times 2 \\ &= 18 \times 42. \end{aligned}$$

Logo, $756 : 18 = 42$.
Técnica 2: fatorando 756, obtemos

$$\begin{aligned} 756 &= 2 \times 378 \\ &= 2 \times 2 \times 189 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 63 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 21 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7. \end{aligned}$$

Agora, fatorando 18, temos

$$\begin{aligned} 18 &= 2 \times 9 \\ &= 2 \times 3 \times 3. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{756}{18} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 3 \times 7}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3}} = 2 \times 3 \times 7 = 42.$$

■

Exercício 3.29 Calcule o quociente $20\,018 : 36$, usando, pelo menos, duas técnicas diferentes.

Solução. Temos:

$$\begin{aligned} 20\,018 &= 20\,000 + 18 \\ &= 18\,000 + 2\,000 + 18 \\ &= 36 \times 500 + 1\,800 + 200 + 18 \\ &= 36 \times 500 + 36 \times 50 + 200 + 18 \\ &= 36 \times 500 + 36 \times 50 + 36 \times 5 + 20 + 18 \\ &= 36 \times 500 + 36 \times 50 + 36 \times 5 + 36 + 2 \\ &= 36 \times 556 + 2. \end{aligned}$$

Logo a divisão $20\,018 : 36$ tem quociente 556 e resto 2. Estas contas podem ser representadas com o uso da seguinte "chave":

$$\begin{array}{rrrrrr|l} & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 & 3\ 6 \\ \cline{7-7} - & 1 & 8 & 0 & & & 5\ 5\ 6 \\ \cline{2-4} & & 2 & 0 & 1 & & \\ & - & 1 & 8 & 0 & & \\ \cline{3-5} & & & 2 & 1 & 8 & \\ & & - & 2 & 1 & 6 & \\ \cline{4-6} & & & & & 2 & \end{array}$$

Outra forma de efetuar esta divisão é considerar que $20\,018 = 10\,009{\times}2$ e que $18 = 9{\times}2$. Assim

$$\begin{aligned} 20\,018{\times}2 &= (9\,999 + 1 + 9){\times}2 \\ &= (9\,999 + 9){\times}2 + 1{\times}2 \\ &= (1\,111 + 1){\times}9{\times}2 + 1{\times}2 \\ &= 1\,112{\times}9{\times}2 + 1{\times}2 \\ &= 556{\times}2{\times}9{\times}4 + 2 \\ &= 556{\times}36 + 2. \end{aligned}$$

■

Exercício 3.30 Complete as lacunas em cada uma das igualdades:

- $11 \times \_\_\_ = 132$
- $12{\times}9 = \_\_\_\_ + 18$
- $12{\times}29 = 300 + \_\_\_\_ + 8$
- $24{\times}15 = \_\_\_\_ {\times}45$

Solução. O objetivo não é calcular cada produto, mas reescrevê-lo com outras fatores, usando propriedades como a associatividade. Vejamos:

- $132 = 110 + 2211{\times}10 + 11{\times}2 = 11{\times}12$. Logo, concluímos que $11{\times}12 = 132$ sem fazer contas de divisão, explicitamente!
- $12{\times}9 = 90 + 18 = 108$.
- $12{\times}29 = 12{\times}30 - 12 = 360 - 12 = 300 + 60 - 12 = 300 + 48 = 300 + 40 + 8$.
- $24{\times}15 = 8{\times}3{\times}15 = 8{\times}45$. Repare que, para determinarmos este produto, basta, agora, considerarmos que $8{\times}45 = 4{\times}90 = 360$.

■

Exercício 3.31 Que número torna a igualdade abaixo correta?

$$63{\times}64 = 56 \times \star$$

Solução. Note que

$$63{\times}64 = 7{\times}9{\times}8{\times}8 = 7{\times}8{\times}9{\times}8 = 56{\times}72.$$

Logo $\star = 72$. ■

Exercício 3.32 Quais os divisores de 432?

Exercício 3.33 Determine os múltiplos comuns de 6 e 8.

Solução. Fatorando 6 e 8, temos:

$$6 = 2{\times}3 \quad \text{e} \quad 8 = 2{\times}2{\times}2.$$

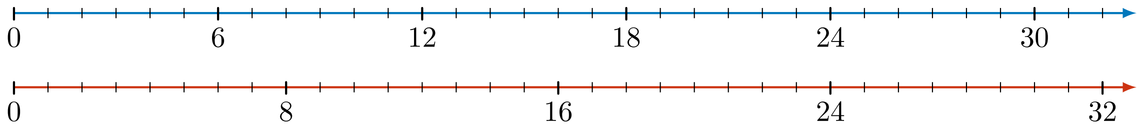
Logo, *qualquer* múltiplo comum de 6 e 8 deve ter, pelo menos, 3 fatores iguais a 2 e 1 fator igual a 3, isto é, deve ser múltiplo de

$$2{\times}2{\times}2{\times}3 = 8{\times}3 = 24.$$

Portanto, o menor ou mínimo múltiplo comum de 6 e 8 é 24. Os múltiplos comuns de 6 e 8 são, portanto, múltiplos de 24:

$$24, 48, 72, \ldots$$

Representamos estas contas nas seguintes retas numéricas:



■

Exercício 3.34 Determine os múltiplos comuns de 12, 15 e 18.

Solução. Fatorando 12, 15 e 18, temos:

$$12 = 3\times 4 = 3\times 2\times 2, \quad 15 = 3\times 5, \quad 18 = 3\times 6 = 3\times 2\times 3.$$

Logo, *qualquer* múltiplo comum de 12, 15 e 18 deve ter, pelo menos, 2 fatores iguais a 2, 2 fatores iguais a 3 e 1 fator igual a 5, ou seja, deve ser múltiplo de

$$2\times 2\times 3\times 3\times 5 = 4\times 5\times 9 = 180.$$

Portanto, o menor ou mínimo múltiplo comum de 12, 15 e 18 é 180.

Outra forma de ver isto é a seguinte: o mínimo múltiplo comum de 12 e 15 é $3\times 4\times 5 = 60$. Assim, o mínimo múltiplo comum de 12, 15 e 18 deve ser o menor múltiplo comum de 60 e 18. Logo, deve ser igual a 180. ■

Exercício 3.35 Determine:

- o mínimo múltiplo comum de 24 e 32;
- o máximo divisor comum de 24 e 32.

Solução. Fatorando 24 e 32, obtemos

$$24 = 3\times 8 = 3\times 2\times 2\times 2 \quad \text{e} \quad 32 = 4\times 8 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2.$$

Logo, todo múltiplo comum de 24 e 32 deve ser múltiplo de

$$3\times 4\times 8 = 3\times 32 = 96.$$

Assim, 96 é o *mínimo múltiplo comum* de 24 e 32. Por outro lado, todo divisor comum de 24 e 32 deve ter apenas fatores iguais a 2, com a quantidade máxima de 3 fatores. Logo, o *máximo divisor comum* de 24 e 32 é igual a

$$2\times 2\times 2 = 8.$$

Observe que

$$\text{MDC}(24{,}32)\times \text{MMC}(24{,}32) = 8\times 96 = 2\times 2\times 2\times 3\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2 = 2\times 2\times 2\times 3\times\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2 = 24\times 32.$$

■

Exercício 3.36 Se dividirmos o número 4 284 por 6, a divisão será exata. Mas, se dividirmos por 60, qual será o resto?

(a) 20. (b) 22. (c) 23. (d) 24. (e) 34.

Solução. Observamos que é possível decompor 4 284 em múltiplos de 6. Vejamos

$$4\,284 = 4\,200 + 60 + 24 = 6\times 700 + 6\times 10 + 6\times 4 = 6\times(700 + 10 + 4) = 6\times 714.$$

Portanto, temos uma divisão *exata* $4\,284 : 6 = 714$. A mesma decomposição pode ser agrupada em múltiplos de 60:

$$\begin{aligned} 4\,284 &= 4\,200 + 60 + 24 = 60\times 70 + 60\times 1 + 24 = 60\times(70 + 1) + 24 \\ &= 60\times 71 + 24. \end{aligned}$$

Como $24 < 60$, concluímos que, na divisão de 4 284 por 60, temos quociente 71 e *resto* 24. ■

Exercício 3.37 Qual é a diferença entre o quociente e o resto da divisão de 272 por 7?

(a) 1. (b) 3. (c) 32. (d) 38. (e) 265.

Solução. Para efetuar a divisão de 272 por 7, calculamos as seguintes divisões sucessivamente:

$$\begin{aligned} 272 &= 210 + 62 = 7\times30 + 62 \\ &= 7\times30 + 56 + 6 = 7\times30 + 7\times8 + 6 \\ &= 7\times38 + 6. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que o quociente desta divisão é 38 e o resto é 6, com a diferença dos dois dada por $38 - 6 = 32$, o que corresponde à alternativa (c). ■

Observação 3.4 As contas que fizemos acima podem ser apresentadas usando o "método da chave", tornando-se mais familiares a quem está acostumado a esta forma de representar o algoritmo da divisão. Vejamos

$$\begin{array}{r|l} 2\;7\;2 & 7 \\ \cline{2-2} -\,2\;1 & 3\;8 \\ \cline{1-1} 6\;2 & \\ -\,5\;6 & \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

Esta **não** é a única forma e de efetuar esta divisão. Poderíamos, por exemplo, *aproximar* o dividendo 272 pelo múltiplo de 7 mais próximo (e maior) que seria 280. Assim, teríamos

$$\begin{aligned} 272 &= 280 - 8 = 7\times40 - 8 = 7\times40 - 14 + 6 \\ &= 7\times40 - 7\times2 + 6 = 7\times38 + 6. \end{aligned}$$

Exercício 3.38 Uma campanha beneficente recebeu 56 caixas, cada uma contendo 24 latas de leite em pó. a) Quantas latas de leite em pó foram recebidas, ao todo? b) Caso a campanha houvesse recebido 1356 latas de leite em pó, quantas caixas iguais, com capacidade para 24 latas, seriam necessárias para guardar todas as latas? Alguma caixa ficaria com menos latas?

Solução. a) Basta efetuarmos a multiplicação 56×24. Para tanto, podemos usar a distributividade da multiplicação em relação à adição de números naturais, obtendo

$$\begin{aligned} 56\times24 &= (50+6)\times(20+4) = 50\times20 + 50\times4 + 6\times20 + 6\times4 \\ &= 1000 + 200 + 120 + 24 = 1344. \end{aligned}$$

Para resolvermos o problema b), simplesmente observamos que

$$1356 = 1344 + 12 = 24\times56 + 12,$$

ou seja, serão usadas 56 caixas cheias e mais 1 caixa contendo apenas 12 latas em vez de 24. Trata-se de uma divisão *não* exata, com resto igual a 12. ■

Exercício 3.39 Uma empresa doou 250 880 quilogramas de alimentos para serem distribuídos por igual em 256 comunidades. Quantos quilogramas serão distribuídos a cada comunidade?

Solução. Uma vez mais, basta efetuarmos a divisão de 250 880 por 256:

$$
\begin{array}{r|l}
2\,5\,0\,8\,8\,0 & 2\,5\,6 \\ \cline{2-2}
-\underline{2\,3\,0\,4} & 9\,8\,0 \\
2\,0\,4\,8 & \\
-\underline{2\,0\,4\,8} & \\
0\,0 & \\
-\underline{0} & \\
0 &
\end{array}
$$

Cada uma das 256 comunidades receberá 980 quilogramas de alimentos. ■

Exercício 3.40 Débora fez uma prova com 70 questões. Ela gastou, em média, três minutos na resolução de cada questão. Quanto tempo Débora levou para fazer a prova?

Solução. O tempo total de resolução da prova é igual a $3{\times}70$, ou seja, 210 minutos. Por fim, recordando que uma hora tem 60 minutos e notando que a divisão de 210 por 60 tem quociente 3 e resto 30, concluímos que Débora fez a prova em 3 horas e 30 minutos. ■

Exercício 3.41 Uma impressora produz 15 cópias por minuto. Uma outra impressora imprime o triplo de cópias dos mesmos impressos em um minuto. Quantas cópias a segunda impressora produz em 12 minutos?

Solução. A solução deste problema requer duas multiplicações. Inicialmente devemos multiplicar 3 por 15 (obtendo 45) para saber quantas cópias a segunda impressora produz por minuto. A seguir, multiplicamos 45 por 12 para calcular quantas cópias a segunda impressora produz em 12 minutos. Você pode usar o método que lhe for mais familiar para calcular o produto $45{\times}12$. Um forma rápida de fazer isso é observando que

$$45{\times}12 = 45{\times}10 + 45{\times}2 = 450 + 90 = 540.$$

■

Exercício 3.42 Dona Ilda tem duas filhas. A primeira gosta de comer sushi a cada 8 dias e a segunda come sushi a cada 12 dias. Dona Ilda, por sua vez, prefere comer sushi a cada 21 dias. Se todas elas comeram sushi hoje, quantos dias se passarão até que as três voltem a comer sushi em um mesmo dia?

(a) 88 dias (b) 96 dias (c) 144 dias (d) 168 dias (e) 210 dias

Solução. O número de dias após os quais Dona Ilda e suas duas filhas comerão sushi novamente em um mesmo dia deve ser múltiplo de 8, já que a primeira filha come sushi de 8 em 8 dias. Analogamente, deve ser múltiplo de 12 e de 21. Logo, deve ser um *múltiplo comum* de 8, 12 e 21. De fato, deve ser o menor ou *mínimo múltiplo comum* (MMC) de 8, 12 e 21. Fatorando esses números em *fatores primos*, obtemos $8 = 2{\times}2{\times}2 = 2^3$, $12 = 2{\times}2{\times}3 = 2^2{\times}3$ e $21 = 3{\times}7$. Assim, o MMC de 8, 12 e 21 é dado pelo produto de todos os fatores nessas fatorações, elevados aos *maiores* expoentes com que aparecem, isto é,

$$\text{MMC}(8, 12, 21) = 2^3{\times}3{\times}7 = 8{\times}21 = 168.$$

Assim, as três mulheres voltarão a comer sushi em um mesmo dia após 168 dias e a alternativa correta é a letra (d). ■

Sequência 3

Exercício 3.43 Em uma árvore de Natal as lâmpadas verdes piscam a cada 5 segundos, as lâmpadas vermelhas a cada 3 segundos, as lâmpadas azuis a cada 6 segundos e as lâmpadas amarelas a cada 8 segundos. De quantos em quantos segundos as quatro lâmpadas acendem ao mesmo tempo?

(a) 120 segundos
(b) 150 segundos
(c) 180 segundos
(d) 210 segundos
(e) 240 segundos

Exercício 3.44 Em uma escola, foram distribuídos 144 cadernos, 192 lápis e 216 borrachas, de modo que o maior número possível de alunos fosse contemplado e todos recebessem o mesmo número de cadernos, o mesmo número de lápis e o mesmo número de borrachas. Como não houve sobra de material, qual o número de cadernos que cada aluno recebeu?

(a) 6 cadernos
(b) 8 cadernos
(c) 9 cadernos
(d) 12 cadernos
(e) 24 cadernos

Exercício 3.45 Detemine todos os divisores do número 504.

Solução. Fatorando 504 em seus fatores primos, temos

$$\begin{aligned} 504 &= 2\times 252 \\ &= 2\times 2\times 126 \\ &= 2\times 2\times 2\times 63 \\ &= 2\times 2\times 2\times 3\times 21 \\ &= 2\times 2\times 2\times 3\times 3\times 7. \end{aligned}$$

Portanto, os divisores do número 504 têm a decomposição em fatores primos apenas envolvendo os números 2, 3 e 7. A lista desses divisores é a seguinte

1	2	3	7		
2×2	2×3	2×7	3×3	3×7	
$2\times 2\times 2$	$2\times 2\times 3$	$2\times 2\times 7$	$2\times 3\times 3$	$2\times 3\times 7$	$3\times 3\times 7$
$2\times 2\times 2\times 3$	$2\times 2\times 2\times 7$	$2\times 2\times 3\times 3$	$2\times 2\times 3\times 7$	$2\times 3\times 3\times 7$	
$2\times 2\times 2\times 3\times 3$	$2\times 2\times 2\times 3\times 7$	$2\times 2\times 3\times 3\times 7$			
$2\times 2\times 2\times 3\times 3\times 7.$					

■

Exercício 3.46 Demonstre que 2685 é um múltiplo de 3 sem efetuar divisões.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} 2.685 &= 2.000 + 600 + 80 + 5 \\ &= 2\times(999+1) + 6\times(99+1) + 8\times(9+1) + 5 \\ &= 2\times 999 + 6\times 99 + 8\times 9 + 2 + 6 + 8 + 5 \\ &= \text{múltiplo de } 3 + 21. \end{aligned}$$

Na última linha, temos a soma de dois múltiplos de 3 que é, portanto, também um múltiplo de 3. ■

Exercício 3.47 Demonstre que 2682 é um múltiplo de 9 sem efetuar divisões.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} 2.682 &= 2.000 + 600 + 80 + 2 \\ &= 2\times(999+1) + 6\times(99+1) + 8\times(9+1) + 2 \\ &= 2\times999 + 6\times99 + 8\times9 + 2+6+8+2 \\ &= \text{múltiplo de } 9 + 18. \end{aligned}$$

Na última linha, temos a soma de dois múltiplos de 9 que é, portanto, também um múltiplo de 9. ■

Exercício 3.48 Calcule o *resto* da divisão de 2687 por 9 sem efetuar divisões.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} 2.687 &= 2.000 + 600 + 80 + 7 \\ &= 2\times(999+1) + 6\times(99+1) + 8\times(9+1) + 7 \\ &= 2\times999 + 6\times99 + 8\times9 + 2+6+8+7 \\ &= \text{múltiplo de } 9 + 18 + 5 = \text{múltiplo de } 9 + 5. \end{aligned}$$

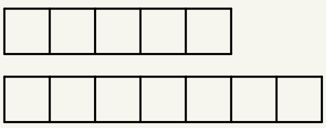
Depois da última igualdade, temos um múltiplo de 9 e um número menor que 9, que, por definição, é o resto: 5. ■

Exercício 3.49 — OBMEP 2019. Os estudantes de uma escola foram divididos em equipes de 8 meninas e 5 meninos cada uma. Se nessa escola há 60 meninas a mais do que meninos, qual é o número total de estudantes?

(a) 130 (b) 260 (c) 390 (d) 520 (e) 650

Solução. Cada equipe, formada por 8 meninas e 5 meninos, tem 13 alunos. O total de alunos é dado, portanto, pelo produto do número de equipes por 13. Por outro lado, a diferença entre o número de meninas e o número de meninos em cada equipe é igual a $8-5=3$. Assim, o número de equipes, multiplicado por 3, é igual a 60, a diferença total entre o número de meninas e o número de meninos. Concluímos que há $60:3=20$ equipes. Portanto, deduzimos que há $20\times13=260$ alunos. A alternativa correta é a letra (b). ■

Exercício 3.50 — Revista Canguru - 2020, p. 44, adaptado. Bia tem várias peças de comprimento 5 e de comprimento 7, como estas:



Juntando e enfileirando essas peças, Bia consegue obter peças maiores com diferentes comprimentos. Qual dos comprimentos a seguir ela **não** vai conseguir obter fazendo isso?

(a) 10 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

Solução. Bia pode obter comprimentos que são somas de múltiplos de 5 e de múltiplos de 7. Este é o caso de $10=5\times2$, $12=5+5$, $14=7\times2$ e $15=5\times3$. Mas *não* é o caso de 13. De fato, o múltiplo de 5 mais próximo (e menor) de 13 é 10. Subtraindo, não obtemos um múltiplo de 7, visto que $13-10=3$. Da mesma forma, o múltiplo de 7 mais próximo (e menor) de 13 é o próprio 7. Subtraindo, não obtemos um múltiplo de 5, visto que $13-7=6$. ■

Exercício 3.51 — KangoTreino 2020. Alice vai ao clube todos os dias, Beto a cada dois dias, Carmen a cada três dias, Daniel a cada quatro dias, Elena a cada cinco dias, Félix a cada seis dias e Gabi a cada sete dias. Hoje todos eles estão no clube. Daqui a quantos dias todos eles se encontrarão no clube novamente?

(a) 27 (b) 28 (c) 210 (d) 420 (e) 5040

Exercício 3.52 Roberto pratica esportes e todos os dias corre pela manhã. Seu desafio é correr sempre 2 km a mais que no dia anterior. Se na segunda feira ele correu 3 km, no domingo ele correrá quantos quilômetros? E na semana toda, quantos quiilômetros terá corrido?

(a) No domingo, 15 km e, na semana, 63 km.
(b) No domingo, 14 km e, na semana, 17 km.
(c) No domingo, 17 km e, na semana, 63 km.
(d) No domingo, 21 km e, na semana, 63 km.
(e) No domingo, 15 km e, na semana, 17 km.

Exercício 3.53 Um pequeno agricultor pode ensacar sua produção de café, que é inferior a 100 quilogramas, em sacos de 18 quilogramas, deixando 7 quilogramas de fora. Uma alternativa é usar sacos de 20 quilogramas para ensacar o café, deixando apenas 1 quilograma de fora. Qual a produção de café do agricultor em quilogramas?

Solução. Os múltiplos de 18 menores que 100 e maiores que 0 são $18, 36, 54, 72, 90$. Portanto, as possíveis quantidades de café produzido são

$$18 + 7 = 25,\ \ 36 + 7 = 43,\ \ 54 + 7 = 61,\ 72 + 7 = 79,\ 90 + 7 = 97.$$

Subtraindo 1 quilograma de cada um dos números desta relação, o único múltiplo de 20 que temos é $61 - 1 = 60$. Logo a quantidade de café produzida pelo agricultor é de 61 quilogramas. ■

Sequência 4

Exercício 3.54 — KangoTreino 2020. 800 zarcs valem o mesmo do que 100 zercs. 100 zarcs equivalem a 250 zircs. Quantos zercs correspondem a 100 zircs?

(a) 2 (b) 5 (c) 10 (d) 25 (e) 50

Solução. Note que 1.000 zircs, ou seja, $4{\times}250$ zircs valem $4{\times}100 = 400$ zarcs. Como 800 zarcs valem 100 zercs, $400 = 800 : 2$ zarcs equivalem a $100 : 2 = 50$ zercs. Concluímos, com esta cadeia de equivalências, que 1.000 zircs valem 50 zercs. Portanto, $100 = 1.000 : 10$ zircs valem $50 : 10 = 5$ zercs. Logo, a alternativa correta é a de letra (b).

■

Exercício 3.55 — Canguru - 2021. Uma caixa tem menos de 50 biscoitos. Os biscoitos da caixa podem ser divididos igualmente por 2, 3 ou mesmo 4 crianças. Entretanto, os biscoitos não podem ser divididos igualmente entre 7 crianças, porque para isso ser possível, serão necessários mais 6 biscoitos. Quantos biscoitos há na caixa?

(a) 12 (b) 24 (c) 30 (d) 36 (e) 48

Solução. O número de biscoitos na caixa deve ser múltiplo comum de 2 e 3. Portanto, deve ser múltiplo de 6. Também deve ser múltiplo de 4. Logo, deve ser múltiplo de 12. As possibilidades, até o máximo de 50 biscoitos, são:

$$12,\ \ 24,\ \ 36,\ \ 48.$$

No entanto, o número de biscoitos, mais 6, deve ser um múltiplo de 7. Somando 6 aos números da lista acima, temos:

$$18, \quad 30, \quad 42, \quad 54.$$

Dessas possibilidades, a única que é, de fato, um múltiplo de 7 é 42. Logo, o número de biscoitos na caixa é

$$42 - 6 = 36 \text{ biscoitos},$$

o que corresponde à alternativa (d). ■

Exercício 3.56 — Círculos de Matemática da OBMEP - adaptado. Sabendo-se que $998.001 \times 17 = 16.966.017$, qual das alternativas corresponde a um múltiplo de 17?

(a) 16.966.011.
(b) 16.966.015.
(c) 16.966.021.
(d) 16.966.025.
(e) 16.966.034.

Exercício 3.57 Dividindo 42 por 6, o quociente é 7 e o resto é zero. Somando 1 ao dividendo e tornando a dividir por 6, o quociente continua sendo 7 e o resto passa a ser 1. Qual o maior número que podemos somar a 42 para que a divisão por 6 continue tendo quociente 7?

(a) 0. (b) 3. (c) 4. (d) 5. (e) 6.

Exercício 3.58 — OBM. Dos números a seguir, qual é o único que pode ser escrito como produto de quatro números naturais consecutivos?

(a) 712 (b) 548 (c) 1026 (d) 1456 (e) 1680

Solução. Esses quatro números consecutivos devem deixar restos $0, 1, 2$ e 3 quando divididos por 4, não necessariamente nesta ordem. Portanto, exatamente um deles é múltiplo de 4. Da mesma forma, devem deixar restos $0, 1$ e 2, quando divididos por 3. Logo, pelo menos um deles é múltiplo de 3. Por fim, pelo menos dois desses números são **pares**, isto é, divisíveis por 2. Observamos que um dos números pares, se for dividido por 2, resulta em um número **ímpar**. Logo, *não* é múltiplo de 4. Concluímos que o produto dos quatro números deve ser múltiplo comum de múltiplo de $2 \times 3 \times 4 = 24$. ■

Exercício 3.59 Mostre que o produto 135×375 é um quadrado perfeito.

Obs Um *quadrado perfeito* é um número da forma n^2 ou $n \times n$, onde n é um número natural.

Exercício 3.60 — OBM. Letícia vendeu todos os seus CDs de videogames para três amigos, que lhe pagaram, respectivamente, R\$ 240,00, R\$ 180,00 e R\$ 320,00. Todos os CDs tinham o mesmo preço. Quantos CDs tinha Letícia, no mínimo?

(a) 20. (b) 21. (c) 25. (d) 28. (e) 37.

Exercício 3.61 — Canguru 2017 - Prova J. Numa sala há quatro crianças com menos de 18 anos e com idades diferentes. Se o produto de suas idades é 882, qual é a soma dessas idades?

(a) 23 (b) 25 (c) 27 (d) 31 (e) 33

4 Tarefas de revisão

4.1 – Tarefas relativas a sistema posicional

Observação 4.1 — Nota ao(à) professor(a). As tarefas nesta seção dizem respeito ao seguinte **bloco de descritores** da Matriz de Referência do SAEB para o quinto ano:

- **D13** - Reconhecer e utilizar características do sistema de numeração decimal, tais como agrupamentos e trocas na base 10 e princípio do valor posicional.
- **D14** - Identificar a localização de números naturais na reta numérica.
- **D15** - Reconhecer a decomposição de números naturais nas suas diversas ordens.
- **D16** - Reconhecer a composição e a decomposição de números naturais em sua forma polinomial.

Esses descritores não são independentes uns dos outros, mas relacionados, na verdade, a um conjunto comum de conhecimentos básicos, dentre os quais:

- Sistema posicional decimal: ordens e classes.
- Escrita por extenso e representação por algarismos dos números naturais.
- Valor posicional dos algarismos.
- Diferentes composições e decomposições de um número natural.
- Graduação da reta numérica em diferentes escalas: unidades, dezenas e centenas.
- Sucessão, ordem e comparação.

Todos esses *objetos de conhecimento* foram trabalhados no caderno anterior do Material Estruturado, juntamente com as diversas habilidades na BNCC e DCRC relacionadas a esses conhecimentos. No que segue, nesta seção, exporemos uma sequência de tarefas relativas a esse conjunto articulado de conhecimentos prévios ou necessários!

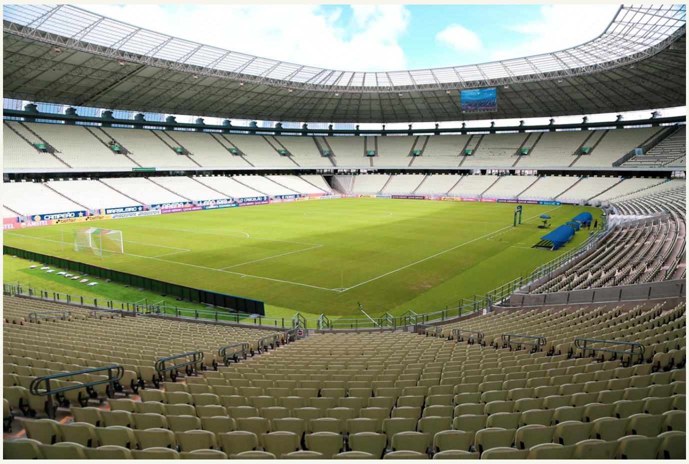


Figura 4.1: Fonte: Secretaria do Esporte e Juventude - Governo do Estado do Ceará

Exercício 4.1 Realize uma pesquisa para responder: qual o número de assentos no Castelão, ou seja, qual sua capacidade máxima de público? Como escrevemos esse número?

Solução. Segundo a Wikipedia, o Castelão tem capacidade para 63 903 pessoas. Veja em https://pt.wikipedia.org/wiki/Estádio_Governador_Plácido_Castelo ■

Exercício 4.2 O Castelão tem lugares para sessenta três mil, novecentos e trinta pessoas em seus assentos? Esse estádio tem capacidade para sessenta mil, trezentos e noventa e três pessoas?

Exercício 4.3 Quais os valores (posicionais) dos algarismos 3 no número 63 903?

Exercício 4.4 A posição do algarismo 0 torna os seguintes números diferentes uns dos outros:

- 63 930
- 63 903
- 63 093
- 60 393

1) Explique por quê.
2) Escreva esses números em ordem crescente.
3) Qual o valor posicional do algarismo 9 em cada um desses números?

Exercício 4.5 O estádio do Maracanã tem capacidade para 78 838 pessoas. Esse número pode ser decomposto como

a) 7 milhares, 8 centenas e 38 unidades.
b) 7 milhares, 88 dezenas e 38 unidades.
c) 78 milhares, 83 dezenas e 8 unidades.
d) 78 milhares, 83 centenas e 8 unidades.

Exercício 4.6 O estádio do Morumbi tem capacidade para 67 052 pessoas. Esse número pode ser decomposto como

a) 6 dezenas de milhar, 75 dezenas e 2 unidades.
b) 6 dezenas de milhar, 705 dezenas e 2 unidades.
c) 67 dezenas de milhar, 5 dezenas e 2 unidades.
d) 67 milhares, 5 centenas e 2 unidades.

Exercício 4.7 O estádio Mané Garrincha, em Brasília, tem capacidade para 72 788 pessoas. Esse número pode ser decomposto como

a) $7\,000 + 2\,000 + 780 + 8$.
b) $70\,000 + 2\,000 + 78 + 8$.
c) $70\,000 + 2\,000 + 780 + 8$.
d) $7\,200 + 78 + 8$.

Identifique o erro nas alternativas incorretas.

Exercício 4.8 O número 50 505 pode ser escrito, por extenso, como

a) Cinco mil, quinhentos e cinco
b) Cinco mil e cinquenta e cinco.
c) Cinquenta mil e cinquenta e cinco.
d) Cinquenta mil, quinhentos e cinco.

Exercício 4.9 O número 72 788 pode ser escrito como

a) 727 dezenas e oitenta e oito unidades.

b) 727 centenas e oitenta e oito unidades.
c) 72 milhares, 78 centenas e oito unidades.
d) 72 milhares, 7 centenas e oitenta e oito dezenas.

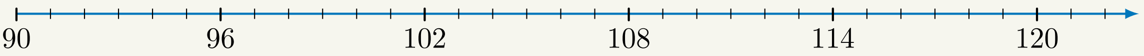
Identifique o erro nas alternativas incorretas.

Exercício 4.10 1) Arredonde o número 63 903 para as unidades de milhar mais próximas.
2) Arredonde o número 63 903 para as centenas mais próximas.

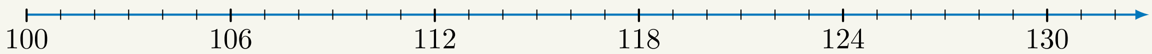
Exercício 4.11 Qual o sucessor de 63 099? E o antecessor de 63 000?

Exercício 4.12 O número 63 093 está mais próximo de 63 000 ou de 63 100?

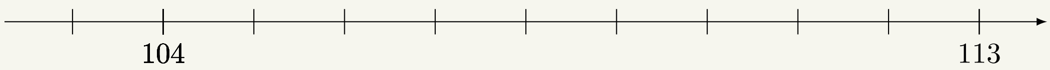
Exercício 4.13 Marque os números 93, 99 e 112 na reta numérica:

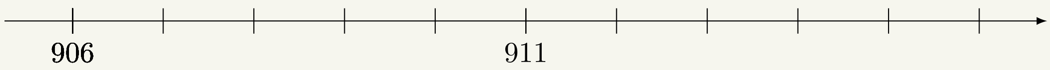


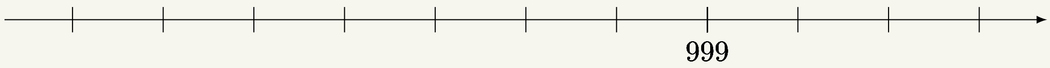
Exercício 4.14 Marque os números 101, 111 e 125 na reta numérica:



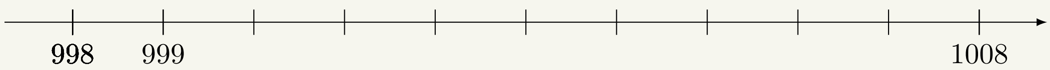
Exercício 4.15 A distância entre duas marcações consecutivas nas retas numéricas é de 1 unidade. Sendo assim, indique os números correspondentes a essas marcações:

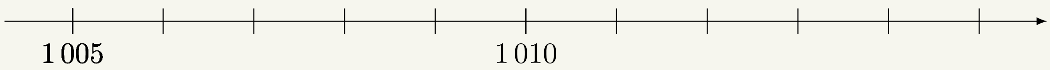


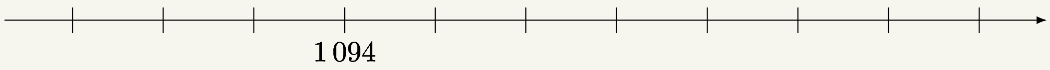




Exercício 4.16 A distância entre duas marcações consecutivas na reta numérica é de 1 unidade. Sendo assim, indique as marcações correspondentes aos números 1 001, 1 011 e 1 100, respectivamente, nas retas numéricas a seguir.

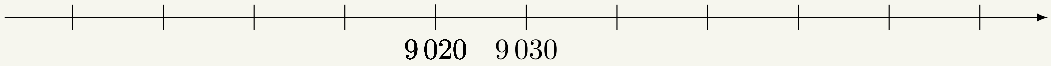


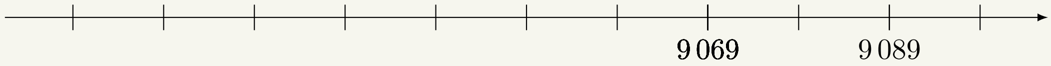




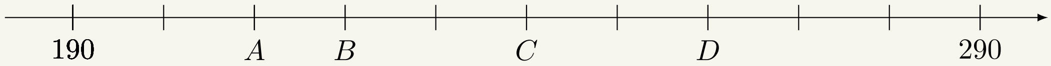
Exercício 4.17 Agora, suponha que a distância entre duas marcações consecutivas nas retas numéricas

é de 10 unidades. Sendo assim, indique os números correspondentes a essas marcações:





Exercício 4.18 Na reta numérica, as letras indicam a localização de alguns números.



A letra que indica a localização do número 240 nessa reta numérica é

a) A b) B c) C d) D

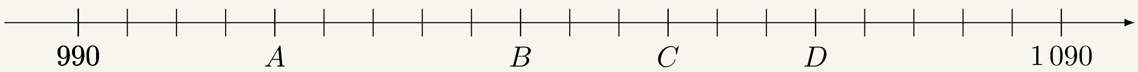
Exercício 4.19 Na reta numérica, as letras indicam a localização de alguns números.

A letra que indica a localização do número 1 035 nessa reta numérica é

a) A b) B c) C d) D

As letras nas alternativas corretas marcam que números?

Exercício 4.20 Na reta numérica, as letras indicam a localização de alguns números:



A letra que indica a ponto **mais próximo** da localização do número 1 048 nessa reta numérica é

a) A b) B c) C d) D

4.2 – Tarefas relativas a operações aritméticas

Observação 4.2 — Nota ao(à) professor(a). As tarefas nesta seção dizem respeito ao seguinte **bloco de descritores** da Matriz de Referência do SAEB para o quinto ano:

- **D17** - Calcular o resultado de uma adição ou subtração de números naturais.
- **D18** - Calcular o resultado de uma multiplicação ou divisão de números naturais.
- **D19** - Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da adição ou subtração: juntar, alteração de um estado inicial (positiva ou negativa), comparação e mais de uma transformação (positiva ou negativa).
- **D20** - Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, idéia de proporcionalidade, configuração

retangular e combinatória.

Esses descritores não são independentes uns dos outros, mas relacionados, na verdade, a um conjunto comum de conhecimentos e habilidades básicas, dentre os quais:

- Decomposição e composição em termos de somas.
- Algoritmos da adição e multiplicação usando decomposição decimal.
- Uso das propriedades operatórias (associatividade, comutatividade, distributividade) nos cálculos de adição e multiplicação.
- Modelagem de situações-problema envolvendo adição e multiplicação.

Todos esses *objetos de conhecimento* foram trabalhados no caderno anterior e neste caderno do Material Estruturado, juntamente com as diversas habilidades na BNCC e DCRC relacionadas a esses conhecimentos. No que segue, neste caderno, exporemos uma sequência de tarefas relativos a esse conjunto articulado de conhecimentos prévios ou necessários!

Exercício 4.21 Calcule os seguintes produtos

(a) $4{\times}6$ (b) $14{\times}16$ (c) $140{\times}160$ (d) $149{\times}16$

Exercício 4.22 Calcule o produto $62{\times}29$ usando dois métodos diferentes.

Exercício 4.23 Calcule o valor das seguintes expressões

1) $34{\times}45$
2) $(34+43){\times}45$
3) $34{\times}(43+45)$
4) $34{\times}(56-43)$

Exercício 4.24 Determine os múltiplos comuns de 12 e 15.

Exercício 4.25 Determine os divisores comuns de 120 e 75.

Exercício 4.26 Ana trouxe uma caixa de bombons de chocolate para a sala e distribuiu 6 bombons para cada uma de suas 4 amigas. Sabendo que restaram 3, quantos bombons havia na caixa?

a) 13
b) 24
c) 27
d) 42

Exercício 4.27 Para melhorar a renda da família, Paula vende bolos. Se, por dia, ela vende R$ 150,00 reais, mas gasta R$ 25,00 com materiais, quantos reais ela consegue ganhar em 5 dias?

a) 125 reais
b) 625 reais
c) 750 reais
d) 875 reais

Exercício 4.28 A tabela mostra a capacidade de quatro conhecidos estádios de futebol no Brasil:

Castelão	63 903
Morumbi	67 052
Mineirão	78 838
Mané Garrrincha	72 788

1) Qual desses estádios tem a maior capacidade?
2) Qual desses estádios tem a menor capacidade?
3) Quantos lugares ao todo, aproximadamente, têm esses quatro estádios?

Exercício 4.29 Calcule a soma $63\,903 + 67\,052$.

Exercício 4.30 Calcule a diferença $72\,788 - 63\,903$.

Exercício 4.31 Recentemente, registrou-se que o clube de futebol do Ceará tem 17 382 torcedores e o clube de futebol do Fortaleza tem 15 854.

1) Qual o total de torcedores desses dois clubes?
2) Quantos torcedores o Ceará tem **a mais** que o Fortaleza?

Exercício 4.32 Em um partida do futebol do clássico-rei Ceará × Fortaleza, nesta reabertura dos estádios, havia 2 810 torcedores do Ceará e 2 930 torcedores do Fortaleza. Se cada um dos torcedores pagou R$ 50,00 de ingresso, quanto foi apurado, em reais, nesta partida?

Exercício 4.33 Para assistir a um jogo no Castelão, um grupo de pessoas comprou ingressos para 18 assentos em 14 filas. Quantas pessoas há no grupo?

a) 32
b) 152
c) 222
d) 252

Exercício 4.34 Na saída do jogo, 25 pessoas desse grupo foram a uma lanchonete e cada uma delas comprou um cachorro-quente de R$ 6,00 e um suco de R$ 3,00. Quanto, no total, essas pessoas gastaram com esses lanches?

a) R$ 9,00
b) R$ 34,00
c) R$ 150,00
d) R$ 225,00

Exercício 4.35 Para voltarem para casa, 12 desses amigos alugaram uma *van*, pagando, cada um deles, R$ 5,00. Se receberam, ao todo, R$ 3 de troco do dono da *van*, quanto custou o aluguel?

a) R$ 24,00
b) R$ 36,00
c) R$ 57,00
d) R$ 60,00

5 Orientações metodológicas

Na apresentação do material e ao longo do texto, apontamos várias sugestões de caráter metodológico para a implementação de roteiros curriculares e rotinas pedagógicas de uso do material, com ênfase na recuperação e fortalecimento das aprendizagens e, não menos importante, no gradual desenvolvimento de competências complexas, além das competências e habilidades da BNCC e DCRC, direta ou indiretamente relacionadas aos temas deste caderno.

Nesta seção, continuaremos apresentando, brevemente, algumas sugestões relacionadas ao conceito e práticas do **ensino explícito**, conforme sistematizados pelo Professor Clermont Gauthier e seus colaboradores. Esta metodologia tem forte base empírica, não sendo apenas algo normativo e, sim, fundamentado em evidências da Psicologia Cognitiva e, ainda mais relevante, em avaliações de impacto realizadas com o necessário rigor analítico.Como mencionamos no caderno anterior, o desenho metodológico do ensino explícito é baseado na tríade

preparação-interação-consolidação,

referida pelo acrônimo PIC. Seguimos, assim como no caderno anterior, descrevendo alguns dos elementos da etapa P, a de preparação, uma vez que está fortemente associada ao contexto de recuperação de aprendizagens em que esses materiais são trabalhados, segundo o planejamento pedagógico no âmbito do Mais PAIC e do Pacto pela Aprendizagem. Consideremos, aqui, o seguinte elemento:

Determinar os conhecimentos prévios.

A respeito desta estratégia, é preciso que esteja claro para o professor quais conhecimentos (definições, técnicas, exemplos, métodos, fatos, habilidades, dentre outros elementos cognitivos) são **pré-requisitos** para os objetos de conhecimento e os objetivos de aprendizagem almejados no planejamento. Isso é particularmente válido nas rotinas pedagógicas que visam trabalhar descritores de avaliações como o SAEB, uma vez que cada descritor *pressupõe* uma cadeia (de fato, uma teia) de conhecimentos anteriores, em termos lógicos e cognitivos. Veja, por exemplo, como associamos alguns descritores da Matriz de Referência do quinto ano a uma lista inteira de saberes e habilidades, tanto da Matriz dos Saberes quanto da própria BNCC e, por conseguinte, do DCRC. O professor precisa enumerar e, mais que isso, estabelecer as relações de interdependência entre esses conhecimentos prévios ou necessários. Ainda mais relevante, deve **averiguar** se os alunos detêm esses conhecimentos e em que grau. Os exercícios das sequências 1 e 2, sobretudo os iniciais, podem ajudar nessa sondagem, já que foram pensados exatamente para essa função diagnóstica. As tarefas de revisão finais também são adequadas ao diagnóstico de conhecimentos prévios, especialmente daqueles diretamente associados aos descritores do SAEB ali enumerados.

Por fim, é de extrema importância que o professor possa acessar, por meio de questionamentos, discussões e cuidados análise das tarefas, as representações e pré-conceitos (no sentido de conceitos previamente formulados, ainda que, muitas vezes, de modo não formal) dos alunos com respeito a esses conhecimentos prévios. Tais representações, significados e usos já estabelecidos na memória dos alunos podem trazer consigo falhas de entendimento ou limitações na mobilização desses conhecimentos. Nas palavras de Gauthier e colaboradores:

> *Já salientamos o fato de que o professor deve estar especialmente atento às representações que impõem obstáculos ao aprendizado, isto é, às interpretações equivocadas que surgem ao longo das sessões de aprendizado e se transformam em dificuldades para os alunos. Em ensino explícito, o professor deve estar constantemente à espreita do conteúdo da mente, dos modos de raciocínio e dos erros de compreensão dos alunos, de modo a trabalhar as representações continuamente através de questionamentos,* **modelagens***, uso de exemplos e contraexemplos,* **andaimes***, práticas guiadas e* feedbacks (Gauthier et al., 2014).

Nos próximos cadernos, desenvolveremos esses e outros conceitos mais detalhadamente. As tarefas de revisão foram estruturadas para propiciar **andaimes** cognitivos (tradução do termo *scaffolding* na literatura especializada em inglês).

6 Referências

- Alguns portais e plataformas
  - Portal da Matemática: https://portaldaobmep.impa.br
  - Khan Academy: https://www.khanacademy.org/math/cc-fourth-grade-math
  - Roda de Matemática: https://www.rodadematematica.com.br/
  - OBMEP: http://www.obmep.org.br/provas.htm
  - Canguru: https://www.cangurudematematicabrasil.com.br
- Alguns canais e vídeos
  - Isto é Matemática: https://www.youtube.com/c/istoematematica
  - OBMEP: https://www.youtube.com/user/OBMEPOficial
  - Matemaníaca: https://www.youtube.com/channel/UCz4Zuqtj9fokXH68gZJmCdA
  - Números na BBC Brasil: https://www.youtube.com/watch?v=Kgt3UggJ70k
  - Marcus Du Sautoy, The Code, BBC.
- Referências para desenvolvimento profissional
  - Boaler, Jo. Mentalidades matemáticas. Porto Alegre, Penso, 2018.
  - Gauthier, Clermont et al. Ensino explícito e desempenho dos alunos: a gestão dos aprendizados. Petropólis, RJ: Vozes, 2014.
  - Dehaene, Stanislas. The number sense: how the mind creates mathematics - revised and updated edition. Oxford: Oxford University Press, 2011.
  - Oakley, Barbara et. al. A mind for numbers: how to excel at math and science. New York: TarcherPerigee, 2014.
  - Oakley, Barbara et al. Uncommon sense teaching. New York: TarcherPerigee, 2021.
- Referências sobre a temática do caderno
  - Bellos, Alex. Alex no pais dos números. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.
  - Dorichenko, S. Um círculo matemático de Moscou. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
  - Holanda, Bruno; Chagas, Emiliano. Círculos de Matemática da OBMEP, volume 1: primeiros passos em combinatória, aritmética e álgebra. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
  - Wu, Hung-Hsi. Compreender os Números na Matemática Escolar. Porto: Porto Editora & Sociedade Portuguesa de Matemática
  - Murcia, Joseángel. Y me llevo una. Zaragoza: Nordica Libros, 2019.
  - Stillwell, John. Elements of Mathematics. Princeton: Princeton University Press, 2016.
- Materiais interessante sobre métodos de multiplicação e discussões muito recentes sobre a complexidade (no sentido computacional) dos algoritmos de multiplicação:
  - Sobre o método Karatsuba de multiplicação, com um ótimo e interessante contexto histórico: https://youtu.be/cCKOl5li6YM
  - Sobre o método russo de multiplicação: Numberphile em https://youtu.be/HJ_PP5rqLg0
  - Sobre os desafios computacionais da multiplicação: matéria "Mathematicians discover the perfect way to multiply" na Quanta Magazine em https://www.quantamagazine.org/mathematicians-discover-the-perfect-way-to-multiply-20190411/

CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

CIENTISTA CHEFE
EDUCAÇÃO

PACTO PELA
APRENDIZAGEM

MAISPAIC