CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

CADERNO DE ATIVIDADES

FORTALECENDO APRENDIZAGENS

MATEMÁTICA

8° E 9° ANOS

ALUNO

CIENTISTA CHEFE
EDUCAÇÃO
PACTO PELA APRENDIZAGEM
MAISPAIC

Volume 1

GOVERNADOR
Camilo Sobreira de Santana

VICE-GOVERNADORA
Maria Izolda Cela de Arruda Coelho

Secretária da Educação	Eliana Nunes Estrela
Secretário Executivo de Cooperação com os Municípios	Márcio Pereira de Brito
Assessora Especial de Gabinete	Ana Gardennya Linard
Coordenadora de Cooperação com os Municípios para Desenvolvimento da Aprendizagem na Idade Certa	Bruna Alves Leão
Articuladora da Coordenadoria de Cooperação com os Municípios para Desenvolvimento da Aprendizagem na Idade Certa	Marília Gaspar Alan e Silva
Equipe da Célula de Fortalecimento da Alfabetização e Ensino Fundamental - Anos Finais	Izabelle de Vasconcelos Costa (Orientadora) Tábita Viana Cavalcante (Gerente) Ednalva Menezes da Rocha Galça Freire Costa de Vasconcelos Carneiro Rafaella Fernandes de Araújo
Leitura Crítica	Tábita Viana Cavalcante Miranda
Revisão Gramatical	Ednalva Menezes da Rocha
Equipe Programa Cientista Chefe em Educação Básica	Jorge Herbert Soares de Lira (Coordenador)
Elaboração e revisão de texto	Antonio Caminha M. Neto Bruno Holanda Emiliano Augusto Chagas Fabrício Siqueira Benevides Fernando Pimentel Jorge Herbert Soares de Lira Samuel Barbosa Feitosa Ulisses Parente

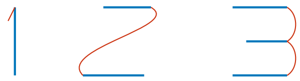
Sumário

1 Aritmética de Números Reais

1.1 – Números em contagens e medidas

Nosso primeiro contato com números se dá através dos *inteiros não negativos*, aqui chamados de números *naturais*[1] (conjunto com símbolo $\mathbb{N}$).

Na língua portuguesa (assim como na maioria das línguas latinas), utilizamos os algarismos hindu-arábicos em um sistema posicional para representar quantidades. Os traçados dos três primeiros algarismos não nulos, 1, 2 e 3, trazem em si lembretes dos valores que eles representam.



Os números naturais são usados para expressar a *cardinalidade* ou *quantidade* de elementos em um conjunto, em muitos contextos. Por exemplo, números naturais podem expressar quantos alunos há em sua turma ou quantos quilômetros separam as cidades de Crato e Arneiroz.

Rapidamente, surge a necessidade de realizar *operações* com os números naturais, como a adição, multiplicação e divisão, por exemplo. Quando somamos ou multiplicamos dois números naturais, o resultado, isto é, a soma ou o produto, são sempre números naturais, também. Entretanto, ao realizar subtrações, mesmo partindo de números naturais, o resultado pode ser um número negativo, como em

$$3 - 5 = -2.$$

Da mesma forma, o resultado da divisão entre dois números naturais (com divisor não-nulo) pode ser um número não inteiro, como no seguinte exemplo:

$$3 : 5 = 0{,}6.$$

1.1.1 – Números inteiros

Portanto, a operação de subtração fica bem definida no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, que amplia o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. De fato, $\mathbb{Z}$ inclui os números naturais não-nulos

$$1, 2, 3, 4, \ldots,$$

o zero e os números inteiros negativos

$$\ldots, -4, -3, -2, -1.$$

Os números inteiros podem ser representados geometricamente na *reta numérica*: o número 0 marca um ponto de referência na reta, chamado de *origem*: os números inteiros positivos são *representados* por pontos marcados à direita da origem; os números inteiros negativos são representados por pontos marcados à esquerda da origem. A distância entre pontos representando dois números *consecutivos* (por exemplo, 3 e 4; ou -4 e -3) é sempre igual a 1. Veja que os pontos estão espaçados por intervalos de mesmo comprimento na seguinte figura:

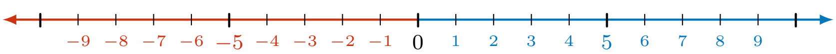


Figura 1.1: inteiros sobre a reta.

Dizemos que os pares de números -1 e 1, -2 e 2, etc., são *opostos* ou *simétricos*. O simétrico de 0 é o próprio 0. O *valor absoluto* ou *módulo* de um número inteiro n, denotado $|n|$, é definido da seguinte forma

[1] Alguns autores não consideram o número zero como um natural. Isso é uma mera convenção, mas é importante que autores, alunos e professores deixem suas escolhas claras para não causar confusão na comunicação das ideias.

- $|n|$ é o *oposto* de n, se n é um número inteiro negativo. Por exemplo, $|-3| = 3$.
- $|n|$ é o *próprio número* n, se é um número inteiro positivo. Por exemplo, $|3| = 3$.

Resumindo, números opostos têm o mesmo módulo, que pode ser interpretado como a distância *não orientada* da origem aos pontos que os representam: ou seja, os pontos que representam os números 3 e -3 estão à mesma distância da origem. Podemos representar o número oposto a um dado número n como sua *reflexão* em torno do 0, isto é, em torno da origem da reta numérica, como na figura a seguir:

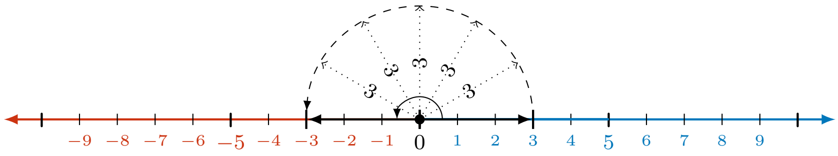


Figura 1.2: números opostos obtidos por reflexão

A adição de números inteiros pode ser visualizada por meio de translações à esquerda e à direita na reta numérica: por exemplo, a soma dos números inteiros positivos 2 e 3 pode ser representada do seguinte modo:

- partimos do ponto 2 e transladamos 3 unidades **para a direita**, ou
- partimos do ponto 3 e transladamos 2 unidades também **para a direita**.

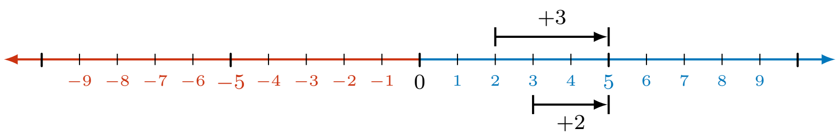


Figura 1.3: interpretação geométrica de $3 + 2 = 2 + 3 = 5$. Ambas as setas terminam no ponto 5.

Agora, a soma do número inteiro positivo 3 e do número inteiro negativo -2 pode ser representada geometricamente das seguintes formas:

- partimos do ponto 3 e transladamos 2 unidades **para a esquerda**,
- partimos do ponto -2 e transladamos 3 unidades **para a direita**.

Deste modo, justificamos geometricamente o seguinte resultado

$$3 + (-2) = (-2) + 3 = 1.$$

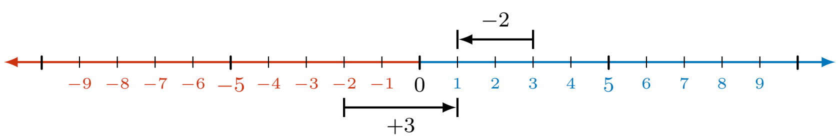
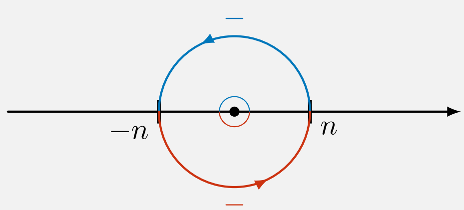


Figura 1.4: interpretação geométrica de $3 + (-2) = (-2) + 3 = 1$.

Observe, geometricamente, que o oposto do oposto de um número inteiro é o próprio número, isto é,

$$-(-n) = n,$$



o que justifica a "regra" de "*menos* com *menos* dá mais", como vemos na escola.

De modo similar, podemos justificar e interpretar, usando translações, a soma

$$2 + (-3) = (-3) + 2 = -1.$$

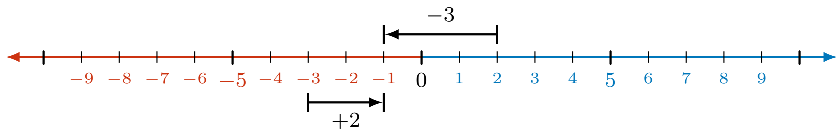


Figura 1.5: interpretação geométrica de $2 + (-3) = (-3) + 2 = -1$.

Desta vez, para calcular a soma dos dois números inteiros negativos -3 e -2, podemos realizar um dos seguintes procedimentos:

- partimos do ponto -3 e transladamos 2 unidades **para a esquerda**,
- partimos do ponto -2 e transladamos 3 unidades **para a esquerda**,

o que justifica, a partir da figura, o seguinte resultado

$$-3 + (-2) = -2 + (-3) = -5$$

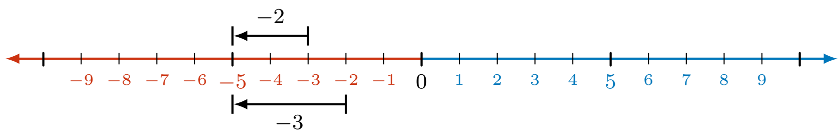


Figura 1.6: interpretação geométrica de $(-3) + (-2) = (-2) + (-3) = -5$.

Os números inteiros negativos como -2 e -3 são colocados entre parênteses nessas expressões para não confundirmos o sinal $+$, que representa a **operação** de adição, e o sinal $-$, que faz parte do próprio número! A dúvida que você deve ter, naturalmente, é: qual a relação do sinal "$-$" em "-2" com o sinal de subtração que vimos anteriormente? Vamos esclarecer este ponto logo adiante.

Para tornar mais *aceitáveis* essas **regras de sinais** da adição de números inteiros, podemos usar um exemplo com valores monetários: receitas (ganhos, lucros, poupanças) são representadas por números inteiros positivos; despesas (gastos, prejuízos ou dívidas) são representadas por números inteiros negativos. Assim sendo, observemos que

(i) quem *tem* 30 reais e **ganha** 20 reais, passa a ter $30 + 20 = 50$ reais;
(ii) quem *tem* 30 reais e **gasta** 20 reais, passa a ter $30 + (-20) = 10$ reais, ou
(iii) quem *deve* 20 reais e **ganha** 30 reais, pode pagar sua dívida e ficar com $(-20) + 30 = 10$ reais;
(iv) quem *tem* 20 reais e **gasta** 30 reais, contrai uma dívida: $20 + (-30) = -10$, ou seja, 10 reais de *dívida*, por isso, 10 reais "negativos"; ou
(v) quem *deve* 30 reais e **ganha** 20 reais, pode diminuir sua dívida de 30 para 10 reais: $(-30) + 20 = -10$;
(vi) quem *deve* 30 reais e **gasta** mais 20 reais, aumenta sua dívida para $(-30) + (-20) = -50$ reais "negativos", isto é, 50 reais de dívidas.

Nos exemplos acima, percebemos que quando somamos um número inteiro negativo a um número inteiro positivo, estamos, de fato, efetuando uma subtração. Por exemplo

$$30 + (-20)$$

é, de fato, igual a

$$30 - 20 = 10.$$

Da mesma forma,

$$(-20) + 30 = 30 - 20 = 10.$$

Na escola, normalmente, isto é ensinado como uma "regra" em que "*mais* com *menos* dá menos". Podemos resumir esta observação **definindo** a subtração de dois números inteiros:

> *A diferença de dois números inteiros m e n, nesta ordem, é definida como a soma de m com o oposto de n, isto é,*
>
> $$m - n = m + (-n).$$

Como exemplos, temos

- $4 - 3 = 4 + (-3) = 1$ (partindo de 4, transladamos 3 unidades para a **esquerda**. Ou: tenho 4 reais e gasto 3, ficando com 1 real);
- $3 - 4 = 3 + (-4) = -1$ (partindo de 3, transladamos 4 unidades para a **esquerda**. Ou: tenho 3 reais e gasto 4, ficando com 1 real de dívida).
- $3 - (-4) = 3 + (-(-4)) = 3 + 4 = 7$ (lembre que o oposto do oposto de 4 é o próprio 4, ou seja $-(-4) = 4$).

1.1.2 – Números racionais

Agora, discutimos mais uma "ampliação" do nosso conjunto de números, necessária para que possamos definir a divisão de um número inteiro qualquer por outro número inteiro não-nulo dado. Como vimos, a divisão *exata*

$$8 : 4 \quad \text{ou} \quad \frac{8}{4}$$

gera um número inteiro (de fato, um número natural), a saber, o número 2, uma vez que

$$8 = 4{\times}2.$$

No entanto, ao dividirmos

$$9 : 4 \quad \text{ou} \quad \frac{9}{4}$$

não obtemos um número inteiro. De fato,

$$9 = 4{\times}2 + 1,$$

ou seja, temos um *resto*, igual a 1, nesta divisão. Escrevendo o quociente e o resto em termos de *frações*, temos:

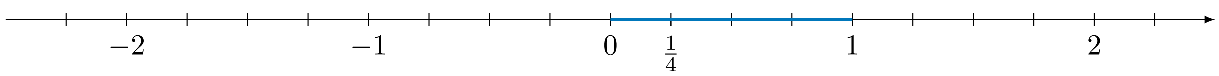
$$\frac{9}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4}.$$

Ou seja, ao dividirmos o resto 1 por quatro, geramos uma fração, $1/4$, da unidade. Números desta forma não são inteiros. Para dar sentido a estas divisões não-exatas, cujos resultados não são números em $\mathbb{Z}$, definimos o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

Na sequência, vamos discutir, resumidamente, os números racionais por meio de exemplos. Iniciamos observando que as **frações**

$$\ldots, -\frac{5}{4}, -\frac{4}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{4}, -\frac{1}{4}, \; 0, \; \frac{1}{4}, \; \frac{2}{4}, \; \frac{3}{4}, \; \frac{4}{4}, \; \frac{5}{4}, \ldots$$

(lêem-se "menos dois quartos", "menos um quarto", "um quarto", "dois quartos", e assim por diante) representam pontos que dividem a reta numérica em segmentos de comprimentos iguais. Na seguinte reta numérica



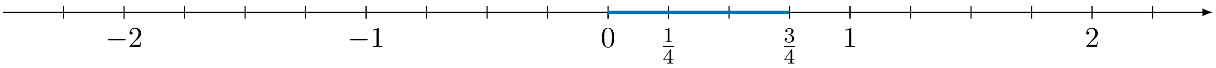
a distância entre os pontos 0 e 1, igual a 1 **unidade de medida**, é 4 *vezes maior* do que a distância do ponto 0 ao ponto $\frac{1}{4}$, que corresponde à **fração**

$$\frac{1}{4}$$

da unidade de medida. Assim,

$$4 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Da mesma forma, de acordo com a figura,



a distância entre os pontos 0 e $\frac{3}{4}$ é dada pela fração $\frac{3}{4}$ da unidade de medida e é 3 vezes maior do que a distância entre os pontos 0 e $\frac{1}{4}$, ou seja,

$$3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

De modo geral, dado um número natural m, a **fração**

$$\frac{m}{4}$$

representa um ponto cuja distância a 0 é m **vezes maior** do que a distância de 0 a $\frac{1}{4}$, ou seja,

$$\frac{m}{4} = m \times \frac{1}{4} = \underbrace{\frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4}}_{m \text{ vezes}}.$$

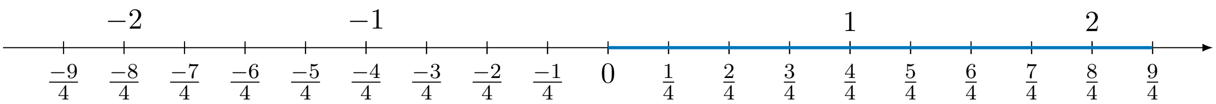
Por exemplo, veja na figura que a distância do ponto 0 ao ponto 2 é 8 *vezes maior* do que a distância do ponto 0 ao ponto $\frac{1}{4}$, sendo dada por

$$\frac{8}{4} = 8 \times \frac{1}{4}.$$

Observe também que essa distância é 2 vezes maior que a distância do ponto 0 ao ponto 1, ou seja,

$$\frac{8}{4} = 2,$$

o que explica, geometricamente, que a fração $\frac{8}{4}$ expressa a divisão $8 : 4$. Marcamos, na seguinte figura, algumas das frações da forma $\frac{m}{4}$:



Observe, na figura acima, que a distância de 0 a $\frac{9}{4}$ é dada pela distância de 0 a $\frac{8}{4}$ mais a distância de $\frac{8}{4}$ a $\frac{9}{4}$, isto é,

$$\frac{9}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4}.$$

Esta é, como vimos antes, uma forma de expressar a *divisão* com resto

$$9 = 4 \times 2 + 1.$$

Observe, também, que a distância de 0 a $\frac{2}{4}$ é **metade** da distância de 0 a 1, isto é,

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Geometricamente, o ponto $\frac{2}{4}$ é o *ponto médio* entre 0 e $1 = \frac{4}{4}$, ou seja, o ponto $\frac{2}{4}$ divide o segmento de reta de 0 a 1 ao **meio**. A igualdade

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

é exemplo de uma **equivalência** de frações.

De modo geral, dado um número natural n, diferente de zero, a **fração**

$$\frac{1}{n}$$

representa um ponto na reta numérica, entre os pontos 0 e 1, tal que a distância de 0 a 1 é n **vezes maior** que a distância de 0 a $\frac{1}{n}$. Dito de outro modo, as frações

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1$$

dividem o segmento de 0 a 1 em n segmentos de comprimentos iguais. Dado outro número natural m, a **fração**

$$\frac{m}{n}$$

representa um ponto cuja distância a 0 é igual a m vezes a distância de 0 ao ponto $\frac{1}{n}$, ou seja,

$$\frac{m}{n} = m \times \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{m \text{ vezes}}$$

O número m é chamado de **numerador** e o número n de **denominador**. Finalmente, a fração

$$-\frac{m}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{-m}{n}$$

corresponde ao ponto na reta numérica **simétrico** a $\frac{m}{n}$ com respeito a 0.

1.1.3 – Equivalência de frações e números racionais

Temos, então, os **números racionais** como pontos na reta numérica associadas aos números inteiros

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

e às frações

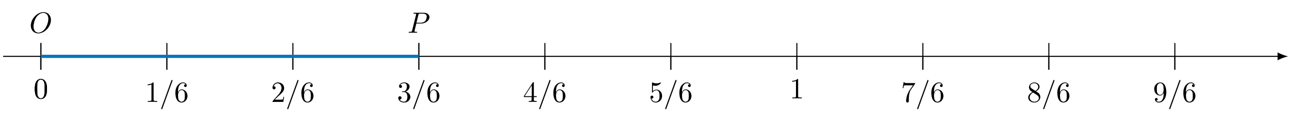
$$\begin{array}{l}
\ldots, -\frac{5}{2}, -\frac{4}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, \; 0, \; \frac{1}{2}, \; \frac{2}{2}, \; \frac{3}{2}, \; \frac{4}{2}, \; \frac{5}{2}, \ldots \\
\ldots, -\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \; 0, \; \frac{1}{3}, \; \frac{2}{3}, \; \frac{3}{3}, \; \frac{4}{3}, \; \frac{5}{3}, \ldots \\
\ldots, -\frac{5}{4}, -\frac{4}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{4}, -\frac{1}{4}, \; 0, \; \frac{1}{4}, \; \frac{2}{4}, \; \frac{3}{4}, \; \frac{4}{4}, \; \frac{5}{4}, \ldots
\end{array}$$

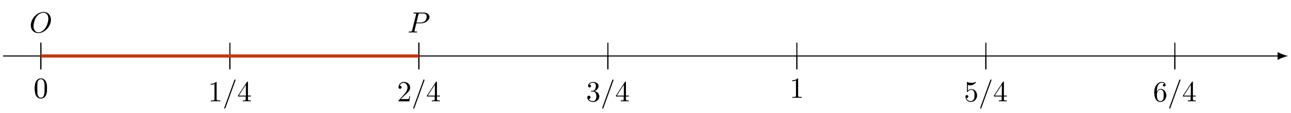
e assim por diante.

Diferentes frações podem representar um mesmo número racional. De fato, **frações equivalentes** estão associadas a um mesmo ponto na reta numérica e correspondem a uma dada distância do ponto 0, expressa em diferentes unidades de medida. Por exemplo, as frações

$$\frac{2}{4} \quad \text{e} \quad \frac{3}{6}$$

são **equivalentes** por representarem o mesmo ponto na reta numérica. De fato, temos:





CIENTISTA CHEFE EDUCAÇÃO FUNCAP MAISPAIC PACTO PELA APRENDIZAGEM

Na primeira reta, dividimos o segmento de 0 a 1 em 6 partes iguais: a unidade de medida passa a ser $1/6$ da unidade inicial. Nesta nova unidade, a distância do ponto O, associado a 0, e o ponto P é igual a $3/6$. Na segunda reta, dividimos o segmento de 0 a 1 em 4 partes iguais: a unidade de medida passa a ser $1/4$ da unidade inicial. Nesta outra unidade, a distância do ponto O, associado a 0, e o ponto P é igual a $2/4$. Logo, geometricamente, comprovamos que

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

correspondem ao mesmo ponto na reta, isto é, ao mesmo **número racional**.

Note que, se multiplicarmos cada um dos lados dessa igualdade por 12, que é um *múltiplo comum* de 4 e 6, a igualdade se mantém:

$$12\times\frac{2}{4} = 12\times\frac{3}{6}.$$

Esta segunda igualdade é verdadeira, pois, do lado esquerdo, temos

$$12\times\frac{2}{4} = 12\times2\times\frac{1}{4} = 2\times12\times\frac{1}{4} = 2\times3 = 6,$$

enquanto o lado direito é dado por

$$12\times\frac{3}{6} = 12\times3\times\frac{1}{6} = 3\times12\times\frac{1}{6} = 3\times2 = 6.$$

Como a segunda igualdade é verdadeira, a primeira também o é. Logo, "comprovamos" que as frações são equivalentes.

De modo geral, as frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ são **equivalentes**, isto é, a igualdade

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

é verdadeira *se, e somente se,*

$$q\times m = p\times n.$$

Nestas expressões, m, n, p e q são números naturais, com n e q diferentes de 0.

De fato, basta multiplicarmos cada um dos lados da igualdade pelo produto $q\times n$, obtendo

$$q\times n\times\frac{m}{n} = q\times n\times\frac{p}{q},$$

igualdade que pode ser reescrita como

$$q\times m\times n\times\frac{1}{n} = n\times p\times q\times\frac{1}{q},$$

donde concluímos que

$$q\times m = n\times p.$$

Usando a definição acima de equivalência de frações, vamos, agora, apresentar algumas **regras práticas** para verificar se duas frações são equivalentes.

Observação 1.1 Se multiplicarmos ou dividirmos o numerador e o denominador de uma fração **por um mesmo número** a natural diferente de zero, obtemos uma fração equivalente. De fato,

$$\frac{m}{n} = \frac{m\times a}{n\times a},$$

visto que

$$m\times n\times a = n\times m\times a.$$

Da mesma forma,

$$\frac{m}{n} = \frac{m:a}{n:a}.$$

Neste caso, a deve ser um *divisor ou fator comum* de m e n com $m : a = p$ e $n : a = q$. Assim, temos:

$$\frac{m}{n} = \frac{p \times a}{q \times a} = \frac{p}{q} = \frac{m : a}{n : a},$$

como queríamos demonstrar.

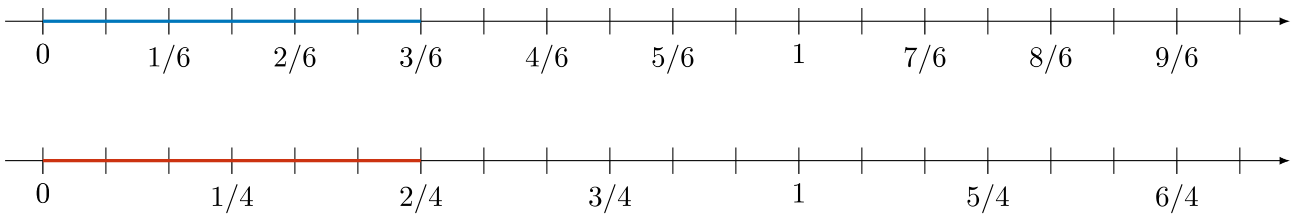
Por exemplo, no caso das frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$, multiplicando *tanto* o numerador *quanto* o denominador por 3 e por 2, respectivamente, obtemos:

$$\frac{2}{4} = \frac{2 \times 3}{4 \times 3} = \frac{6}{12}$$

e

$$\frac{3}{6} = \frac{3 \times 2}{6 \times 2} = \frac{6}{12},$$

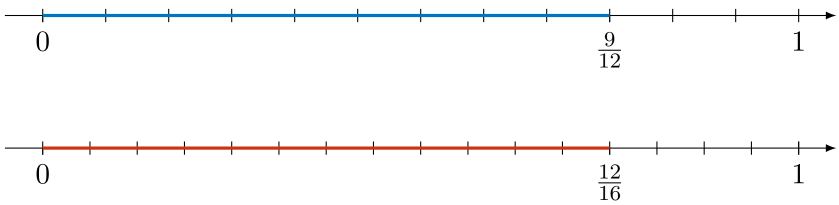
o que corresponde, na reta, a particionarmos cada segmento de comprimento $\frac{1}{4}$ em 3 partes e cada segmento de comprimento $\frac{1}{6}$ em 2 partes, conforme representado nas seguintes figuras:



Note que os comprimentos realçados nas duas retas numéricas são iguais, o que justifica, geometricamente, a equivalência das frações. Observe, também na figura, que

$$\frac{6}{4} = \frac{9}{6}.$$

Podemos, portanto, particionar um dado segmento (por exemplo, o segmento de 0 a 1) em *mais* segmentos de comprimento *menor*, **multiplicando** numerador e denominador por um mesmo fator. Inversamente, podemos particionar um dado segmento em *menos* segmentos de comprimento *maior*, **dividindo** numerador e denominador por um mesmo fator. Por exemplo, consideremos as frações $\frac{9}{12}$ e $\frac{12}{16}$, representadas nas retas numéricas abaixo:



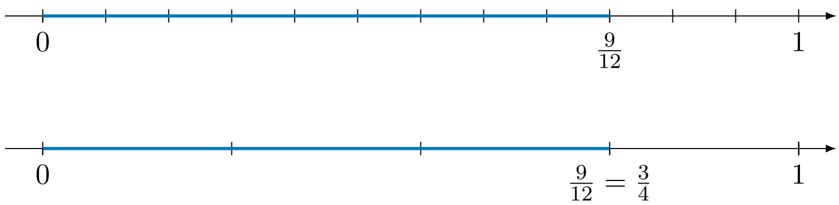
Dividindo tanto os numeradores quanto os denominadores das frações $\frac{9}{12}$ e $\frac{12}{16}$ por 3 e por 4, respectivamente, obtemos:

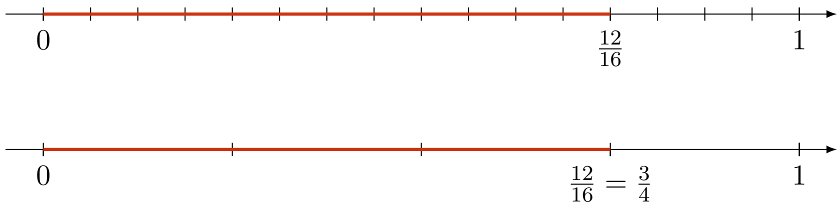
$$\frac{9 : 3}{12 : 3} = \frac{3}{4}$$

e

$$\frac{12 : 4}{16 : 4} = \frac{3}{4}$$

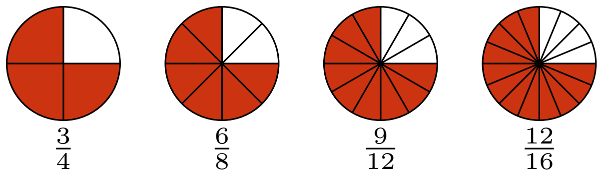
o que significa, geometricamente, termos segmentos com comprimentos 3 vezes maior na primeira reta e 4 vezes maior na segunda:



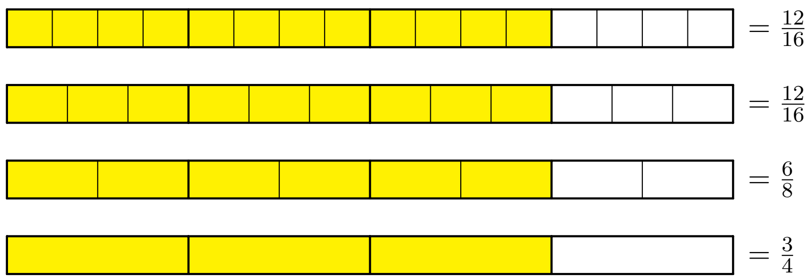


Recapitulando, quando multiplicamos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural diferente de zero, aumentamos a quantidade de partes nas quais um dado segmento é dividido, bem como aumentamos *proporcionalmente* a quantidade de partes tomadas. Por outro lado, quando dividimos o numerador e o denominador por um mesmo natural diferente de zero, diminuímos *proporcionalmente* essas quantidades de partes. Em ambos esses casos, obtemos uma fração equivalente à inicial.

A equivalência das frações que vimos acima pode ser representada utilizando-se "pizzas" ou barras como segue. Por exemplo, as fatias destacadas das pizzas



representam as frações equivalentes indicadas abaixo de cada uma delas. Essas mesmas frações podem ser visualizadas nas barras como as partes destacadas, todas de mesmo comprimento:



Uma infinidade de frações equivalentes a uma dada fração pode ser obtida, portanto, multiplicando ou dividindo numerador e denominador por um mesmo fator. Por exemplo, multiplicando-os por 2, 3, 4, e assim por diante, temos

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \ldots$$

Da mesma forma, divisões sucessivas do numerador e denominador (isto é, *simplificações* das frações) produzem uma sequência de frações equivalentes

$$\ldots = \frac{32}{20} = \frac{24}{15} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

em que a última é **irredutível**. Isto significa que 5 e 8 não têm *divisores comuns* além de 1. Portanto, não há mais como dividir, com resto 0, tanto o numerador quanto o denominador por um mesmo número. Lembremos, de nosso estudo anterior, que, neste caso, dizemos que 5 e 8 são *primos entre si*, ou seja, $\mathrm{MDC}(5,8) = 1$.

Todas as frações equivalentes a uma fração dada são equivalentes a uma fração irredutível. Esse conjunto de frações equivalentes, com uma representante que é *irredutível*, define uma mesma quantidade ou mesmo ponto na reta numérica. Mais precisamente, define um **número racional**.

Observação 1.2 Quando dividimos o numerador e o denominador da fração $\frac{m}{n}$ pelo MDC(m, n), obtemos a forma irredutível da fração. Realmente, após executar essa *simplificação*, não haverá outro fator comum maior que 1 pelo qual possamos dividir o numerador e o denominador, o que torna impossível uma outra *simplificação*.

Por exemplo, uma vez que MDC$(15, 24) = 3$, ao dividirmos o numerador e denominador da fração $\frac{24}{15}$ por 3, obtemos uma fração irredutível

$$\frac{24}{15} = \frac{24 : 3}{15 : 3} = \frac{8}{5}.$$

Concluímos que cada **número racional positivo** é representado por uma fração da forma

$$\frac{m}{n},$$

onde m e n são números naturais, com $n \neq 0$. Esse mesmo número pode ser representado por *todas* as frações equivalentes a esta. Por exemplo, todas as frações da forma

$$\frac{m \times a}{n \times a},$$

onde a é um número natural, não-nulo, representam um mesmo número racional. Além disso, se b é um divisor comum de m e n, as frações da forma

$$\frac{m : b}{n : b}$$

também representam um mesmo número racional. Por exemplo, temos as equivalências das seguintes frações:

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{18}{12} = \ldots$$

Observação 1.3 As frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ são equivalentes e representam o mesmo número racional se, e somente se,

$$mp = qn.$$

Aqui, m, n, p, q são números naturais, com $p \neq 0$ e $q \neq 0$. No exemplo acima, temos

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4},$$

pois

$$3 \times 4 = 2 \times 6 = 12.$$

Note também, por exemplo, que

$$\frac{9}{6} = \frac{9 : 3}{6 : 3} = \frac{3}{2} = \frac{3 \times 2}{2 \times 2} = \frac{6}{4},$$

donde verificamos, uma vez mais, que $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$. Outra forma de comprovarmos essa equivalência é pela igualdade do "produto dos meios pelos extremos":

$$9 \times 4 = 6 \times 6.$$

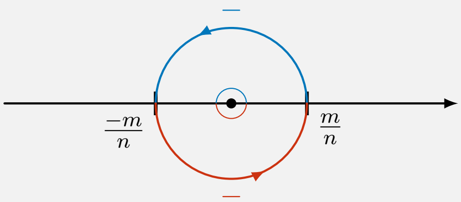
Até este ponto, definimos os **números racionais positivos** como pontos na reta numérica que corresponde a frações equivalentes a uma fração da forma $\frac{m}{n}$, onde m e n são números naturais, com $n \neq 0$. Dado um número racional representado por $\frac{m}{n}$, seu *oposto* ou *simétrico* será um número representado por $\frac{-m}{n}$. Por exemplo, o oposto de $\frac{1}{4}$ será $\frac{-1}{4}$. Em geral, números opostos um ao outro aparecem, na reta, em posições simétricas em relação à origem 0, como explicado no seguinte quadro:

Denotamos o oposto de $\frac{m}{n}$ por $-\frac{m}{n}$. Note que

$$\frac{m}{n} + \left(-\frac{m}{n}\right) = 0.$$

Observe, geometricamente, que o oposto do oposto de um número racional é o próprio número, isto é,

$$-\left(\frac{-m}{n}\right) = \frac{m}{n},$$



o que justifica a "regra" de "*menos* com *menos* dá mais", como vemos na escola.

Com isso, finalizamos nossa apresentação do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, que será formado pelo números racionais positivos, por seus opostos, que formam os números reais negativos, e pelo 0. Temos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

1.1.4 – Representação decimal dos números racionais

Vamos retomar o exemplo da divisão com restos $9 : 4$. O algoritmo euclidiano da divisão dos números naturais assegura que temos *quociente* igual a 2 e *resto* igual a 1. No entanto, podemos "continuar" esse algoritmo usando frações, isto é, usando números racionais (não-inteiros). Executaremos o seguinte procedimento, em que usaremos **equivalência de frações**:

$$\begin{aligned}
9 &= 4\times 2 + 1\\
&= 4\times 2 + \frac{10}{10}\\
&= 4\times 2 + \frac{1}{10}\times(4\times 2 + 2)\\
&= 4\times 2 + \frac{1}{10}\times 4\times 2 + \frac{2}{10}\\
&= 4\times 2 + \frac{1}{10}\times 4\times 2 + \frac{2\times 10}{10\times 10}\\
&= 4\times 2 + \frac{1}{10}\times 4\times 2 + \frac{1}{1\times 100}\times 20\\
&= 4\times 2 + \frac{1}{10}\times 4\times 2 + \frac{1}{100}\times 4\times 5.
\end{aligned}$$

Na primeira igualdade, usamos o algoritmo da divisão para números naturais, obtendo resto igual a 1. Na segunda igualdade, usamos o fato de que

$$\frac{10}{10} = 1.$$

Na terceira igualdade, usamos o algoritmo da divisão para números naturais, dividindo 10 por 4 e obtendo

$$10 = 4\times 2 + 2$$

Para a quinta e sexta igualdades, usamos a equivalência de frações

$$\frac{2}{10} = \frac{2\times 10}{10\times 10} = \frac{20}{100} = \frac{1}{100}\times 20.$$

Por fim, na sétima igualdade, dividimos $20 : 4$ obtendo

$$20 = 4{\times}5.$$

Observamos que o divisor 4 é um fator comum a todos esses produtos e escrevemos:

$$9 = 4{\times}\left(2 + 2{\times}\frac{1}{10} + 5{\times}\frac{1}{100}\right) \tag{1.1}$$

Na expressão entre parênteses, temos *frações decimais*, isto é, frações cujos denominadores são **potências de dez** como 10, 100, 1 000, etc. Escrevemos o resultado da divisão, agora completa, como

$$9 = 4{\times}2{,}25,$$

ou seja

$$9 : 4 = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

Note que o algarismo 2 depois da vírgula é o algarismo que aparece multiplicado por $\frac{1}{10}$ e o algarismo 5, também depois da vírgula, é o algarismo que aparece multiplicado por $\frac{1}{100}$, na **expansão decimal** em (1.1).

Concluímos, com este exemplo, que a fração $\frac{9}{4}$ (que expressa a divisão $9 : 4$) é representada pelo **número na forma decimal** 2,25. Vejamos mais um exemplo dessa representação de frações por números decimais. Considere a divisão $9 : 8$. Repetindo o procedimento acima, temos:

$$\begin{aligned}
9 &= 8{\times}1 + 1\\
&= 8{\times}1 + \frac{10}{10}\\
&= 8{\times}1 + \frac{1}{10}{\times}(8{\times}1 + 2)\\
&= 8{\times}1 + \frac{1}{10}{\times}8{\times}1 + \frac{2}{10}\\
&= 8{\times}1 + \frac{1}{10}{\times}8{\times}1 + \frac{2{\times}10}{10{\times}10}\\
&= 8{\times}1 + \frac{1}{10}{\times}8{\times}1 + \frac{1}{1{\times}100}{\times}20\\
&= 8{\times}1 + \frac{1}{10}{\times}8{\times}1 + \frac{1}{100}{\times}(8{\times}2 + 4)\\
&= 8{\times}1 + \frac{1}{10}{\times}8{\times}1 + \frac{1}{100}{\times}8{\times}2 + \frac{4}{100}\\
&= 8{\times}1 + \frac{1}{10}{\times}8{\times}1 + \frac{1}{100}{\times}8{\times}2 + \frac{4{\times}10}{100{\times}10}\\
&= 8{\times}1 + \frac{1}{10}{\times}8{\times}1 + \frac{1}{100}{\times}8{\times}2 + \frac{1}{100{\times}10}{\times}40\\
&= 8{\times}1 + \frac{1}{10}{\times}8{\times}1 + \frac{1}{100}{\times}8{\times}2 + \frac{1}{1\,000}{\times}8{\times}5.
\end{aligned}$$

Concluímos, colocando o *fator comum* 8 *em evidência*, que

$$9 = 8{\times}\left(1 + 1{\times}\frac{1}{10} + 2{\times}\frac{1}{100} + 5{\times}\frac{1}{1\,000}\right)$$

Logo, a **expansão decimal** completa de $9 : 8$, ou seja, da fração $\frac{9}{8}$ é

$$\frac{9}{8} = 1 + 1{\times}\frac{1}{10} + 2{\times}\frac{1}{100} + 5{\times}\frac{1}{1\,000} = 1{,}125. \tag{1.2}$$

Outra forma, mais direta, de realizar essas contas de expansão decimal é encontrarmos *frações equivalentes* às frações dadas, com denominadores dados por *potências de dez* como 10, 100, 1 000, dentre outras. Por exemplo, temos, multiplicando numerador e denominador de $\frac{9}{4}$ por 25, a seguinte equivalência de frações:

$$\frac{9}{4} = \frac{9 \times 25}{4 \times 25} = \frac{225}{100}.$$

Esta fração da direita se escreve como 2,25, pois

$$\frac{225}{100} = \frac{200}{100} + \frac{20}{100} + \frac{5}{100} = 2 + 2 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100},$$

como havíamos escrito na expansão, entre parênteses, em (1.1).

Da mesma forma, temos

$$\frac{9}{8} = \frac{9 \times 125}{8 \times 125} = \frac{1\,125}{1\,000}.$$

Esta fração da direita se escreve como 1,125, pois

$$\frac{1\,225}{1\,000} = \frac{1\,000}{1\,000} + \frac{200}{1\,000} + \frac{20}{1\,000} + \frac{5}{1\,000} = 1 + 2 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{100} + \frac{5}{1\,000} = 1{,}125,$$

como havíamos escrito na expansão, no lado direito de (1.2).

Finalizando essa sequência de exemplos, vejamos o caso da divisão 9 : 7 ou da fração $\frac{9}{7}$. Neste caso, deduziremos que não é possível encontrar uma fração equivalente cujo denominador seja uma potência de dez. Vejamos:

$$\begin{aligned}
\frac{9}{7} &= \frac{7}{7} + \frac{2}{7} = \frac{7}{7} + \frac{20}{70} = 1 + \frac{1}{10} \times \frac{1}{7} \times (7 \times 2 + 6) = 1 + \frac{1}{10} \times 2 + \frac{1}{10} \times \frac{1}{7} \times 6 \\
&= 1 + \frac{1}{10} \times 2 + \frac{1}{100} \times \frac{1}{7} \times 60 = 1 + \frac{1}{10} \times 2 + \frac{1}{100} \times \frac{1}{7} \times (7 \times 8 + 4) \\
&= 1 + \frac{1}{10} \times 2 + \frac{1}{100} \times 8 + \frac{1}{1000} \times \frac{1}{7} \times 40 = 1 + \frac{1}{10} \times 2 + \frac{1}{100} \times 8 + \frac{1}{1000} \times \frac{1}{7} \times (7 \times 5 + 5) \\
&= 1 + \frac{1}{10} \times 2 + \frac{1}{100} \times 8 + \frac{1}{1000} \times 5 + \frac{1}{10000} \times \frac{1}{7} \times 50 = 1 + \frac{1}{10} \times 2 + \frac{1}{100} \times 8 + \frac{1}{1000} \times 5 + \frac{1}{10000} \times \frac{1}{7} \times (7 \times 7 + 1) \\
&= 1 + \frac{1}{10} \times 2 + \frac{1}{100} \times 8 + \frac{1}{1000} \times 5 + \frac{1}{10000} \times 7 + \frac{1}{100000} \times \frac{1}{7} \times 10 \\
&= 1 + \frac{1}{10} \times 2 + \frac{1}{100} \times 8 + \frac{1}{1000} \times 5 + \frac{1}{10000} \times 7 + \frac{1}{100000} \times \frac{1}{7} \times (7 \times 1 + 3) \\
&= 1 + \frac{1}{10} \times 2 + \frac{1}{100} \times 8 + \frac{1}{1000} \times 5 + \frac{1}{10000} \times 7 + \frac{1}{100000} \times 1 + \frac{1}{1000000} \times \frac{1}{7} \times 30 \\
&= 1 + \frac{1}{10} \times 2 + \frac{1}{100} \times 8 + \frac{1}{1000} \times 5 + \frac{1}{10000} \times 7 + \frac{1}{100000} \times 1 + \frac{1}{1000000} \times \frac{1}{7} \times (7 \times 4 + 2) \\
&= 1 + \frac{1}{10} \times 2 + \frac{1}{100} \times 8 + \frac{1}{1000} \times 5 + \frac{1}{10000} \times 7 + \frac{1}{100000} \times 1 + \frac{1}{1000000} \times 4 + \frac{1}{1000000} \times \frac{2}{7}
\end{aligned}$$

Note que, após vários passos no algoritmo da divisão, voltamos à fração $\frac{2}{7}$, mas multiplicada por $\frac{1}{1\,000\,000}$. Portanto, teríamos que recomeçar, seguindo os mesmos passos, *periodicamente*. Logo, a expansão decimal, nesse caso, é **infinita** e **periódica**. Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{9}{7} &= 1 + \frac{1}{10} \times 2 + \frac{1}{100} \times 8 + \frac{1}{1000} \times 5 + \frac{1}{10000} \times 7 + \frac{1}{100000} \times 1 + \frac{1}{1000000} \times 4 + \frac{1}{1000000} \times \frac{2}{7} \\
&= 1{,}285714 + 0{,}000000285714 + \ldots \\
&= 1{,}285714285714\ldots
\end{aligned}$$

Todo número racional tem uma **expansão decimal**, finita ou infinita, com potências de dez, tanto positivas quanto negativas. Portanto, um número racional pode ser representado tanto na forma de fração quanto na forma de um número decimal.

1.1.5 – Números racionais e comensurabilidade

A expansão decimal dos números racionais é fundamental para expressar **medidas** das mais diversas grandezas em todos os contextos cotidianos, científicos ou tecnológicos.

Os instrumentos e experimentos que permitem medir comprimento, área, volume, massa, tempo, velocidade e outras grandezas são baseados em **unidades de medida**. Todas as medidas têm um nível de precisão e erro. Para escolher a unidade de medida, é preciso levar em conta a **ordem de grandeza** do que está sendo medido, além da finalidade da medição e a disponibilidade dos instrumentos para realizá-la.

Vejamos alguns exemplos que explicam esses pontos. Para medir a altura de uma pessoa ou outras medidas corporais como a circunferência abdominal, usamos *metros* e *centímetros*: dizemos que uma dada pessoa tem 1,74 metros, considerando que a unidade de medida seja em metros, com duas casas decimais após a vírgula. Poderíamos também dizer que essa altura é igual a 174 centímetros. Não seria prático, entretanto, dizer que a pessoa mede 0,00174 quilômetro. Da mesma forma, dizemos que a distância de Milagres a Barro é de 29 quilômetros em vez de 2 900 000 centímetros: a unidade de medida, neste caso, é *quilômetro*, que equivale a 1 000 metros ou a 100 000 centímetros.

Em um extremo das *ordens de grandeza* muito elevadas, temos as distâncias astronômicas.

Fotografia de Greg Rakozy em Unsplash. Disponível em https://unsplash.com/photos/oMpAz-DN-9I?utm_source=unsplash&utm_medium=referral&utm_content=creditShareLink

Por exemplo, a distância da Terra ao centro de nossa galáxia é *estimada* em

$$246\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ quilômetros,}$$

enquanto que a distância do elétron ao núcleo em um átomo de hidrogênio é dada pelo *raio de Bohr*, aproximadamente igual a

$$0{,}000\,000\,000\,052\,9 \text{ metros.}$$

Observação 1.4 Esse vídeo, assim como outros disponíveis na *internet* mostra as diversas ordens de grandeza usadas na Ciência, desde o microcosmo no interior dos núcleos atômicos às estruturas do Universo, como galáxias, quasares, buracos negros:

https://youtu.be/8Are9dDbW24

Ordens de grandeza são expressas por potências de dez, tanto positivas quanto negativas. As potências negativas de dez são *notações* para simbolizar frações da unidade em que o denominador é uma potência positiva de dez, como nos seguintes exemplos:

$$
\begin{aligned}
10^{-6} &= \frac{1}{1\,000\,000} = \frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\\
10^{-5} &= \frac{1}{100\,000} = \frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\\
10^{-4} &= \frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\\
10^{-3} &= \frac{1}{1\,000} = \frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\\
10^{-2} &= \frac{1}{100} = \frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\\
10^{-1} &= \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

Recorde-se que as potências positivas de dez são dadas por produtos *iterados* do fator 10, como em:

$$
\begin{aligned}
10^0 &= 1\\
10^1 &= 10\\
10^2 &= 10\times 10\\
10^3 &= 10\times 10\times 10\\
10^4 &= 10\times 10\times 10\times 10\\
10^5 &= 10\times 10\times 10\times 10\times 10\\
10^6 &= 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10.
\end{aligned}
$$

Com essas potências, podemos expressar a expansão decimal dos números racionais de modo mais sucinto. Por exemplo:

$$
\begin{aligned}
\frac{9}{8} &= \frac{1\,125}{1\,000} = \frac{1\,000}{1\,000} + \frac{100}{1\,000} + \frac{20}{1\,000} + \frac{5}{1\,000}\\
&= 1 + 1\times\frac{1}{10} + 2\times\frac{1}{100} + 5\times\frac{1}{1\,000}\\
&= 1 + 1\times 10^{-1} + 2\times 10^{-2} + 5\times 10^{-3}\\
&= 1{,}125.
\end{aligned}
$$

Distâncias astronômicas envolvem ordens de grandeza com potências positivas elevadas. Por exemplo, a distância da Terra ao Sol, é estimada por

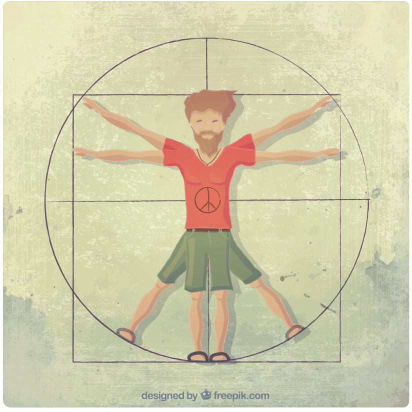
$$
148\,420\,000\,000 \text{ metros} = 1{,}4842\times 10^{11} \text{ metros},
$$

um número da ordem de grandeza de 10^{11} metros. No outro extremo, distâncias atômicas são expressas por potências de dez negativas. Por exemplo, o diâmetro do núcleo do átomo de hidrogênio é dado por

$$
1{,}7566\times 10^{-15} \text{ metro} = 0{,}000\,000\,000\,000\,001\,756\,6 \text{ metro}.
$$

Medidas como essas têm algarismos significativos (certos e duvidosos) e erros, devidos à precisão dos instrumentos ou de sua utilização. Esses temas serão retomados em outros cadernos, quando estudarmos operações aritméticas com números decimais a fundo.

Aprendemos com os antigos gregos que **medir significa comparar a um padrão**, considerado a unidade de medida. Historicamente, as primeiras medidas de comprimento foram baseadas em partes do corpo. Na arquitetura e na escultura da Grécia Clássica, as *proporções* da figura humana tinham um papel predominante, como ilustrado nas obras do escultor Fídias e em templos como o famoso Parthenon.



Man vector created by freepik. Disponível em https://www.freepik.com/vectors/man

Nessas obras, são respeitadas várias relações de proporcionalidade entre as medidas de suas partes, como é o caso da presença de **razões** e **retângulos áureos**. Para mais detalhes sobre esses tópicos, recomendamos consultar textos como este, disponível em https://www.vivadecora.com.br/pro/curiosidades/proporcao-aurea/

Na área rural, especialmente no Nordeste, ainda usamos unidades de medida baseadas em partes do corpo como a *braça*, que equivale a 2,2 metros e é aproximada pela *envergadura*, isto é, a extensão máxima obtida, de uma ponta a outra, abrindo-se os braços totalmente na horizontal. Também derivadas de medidas antigas, muitas das quais presentes na Bíblia, temos o pé, o côvado, o palmo e a jarda, para citar alguns exemplos. No exercício seguinte, consideramos como uma unidade a medida o comprimento de um **pé**.

Problema 1 As alunas do nono ano se encontraram para jogar futebol em um campinho, onde não tem marcação para o lugar das traves. Elas terão que marcar, em cada lado do campo, um comprimento de 5 metros para as traves de cada gol. As meninas não têm uma fita métrica ou trena, mas Sofia lembrou que, como calça 33, seu pé tem um tamanho de 22 centímetros, aproximadamente. Como Sofia pode, então, ajudar a marcar as traves para que elas comecem o jogo?

Solução. A distância entre as marcas do gol, de cada lado do campo, deve ser de 5 metros ou 500 centímetros. Como o pé de Sofia tem, aproximadamente, 22 centímetros, podemos, na prática, aproximar a medida de seu pé para 20 centímetros (*por falta*) ou para 25 centímetros (*por excesso*), visto que

$$20 < 22 < 25.$$

No primeiro caso, os 500 centímetros entre as marcas do gol é aproximada por

$$\frac{500}{20} = 25 \text{ pés de Sofia},$$

enquanto, no segundo caso, essa distância é aproximada por

$$\frac{500}{25} = 20 \text{ pés de Sofia}.$$

Vejamos as medidas reais, nos dois casos, nas seguintes figuras:

Figura 1.7: Medida do gol, usando a estimativa de 20 centímetros para o pé de Sofia

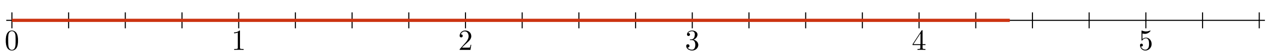


Figura 1.8: Medida do gol, usando a estimativa de 25 centímetros para o pé de Sofia

Repare que, na primeira estimativa, Sofia marcou 25 pés, ou seja, um comprimento de $25 \times 22 = 550$ centímetros, *superior* aos 500 centímetros desejados. Logo, uma estimativa por baixo do tamanho do seu pé resultou em uma aproximação por cima do tamanho da trave, com *erro* de 50 centímetros na medida.

Na segunda estratégia, Sofia marcou 20 pés, ou seja, um comprimento de $20 \times 22 = 440$ centímetros, *inferior* aos 500 centímetros desejados. Logo, uma estimativa por cima do tamanho do seu pé resultou em uma aproximação por cima do tamanho da trave, com *erro* de 60 centímetros na medida. Note que o erro foi ainda maior, pelo fato de que 20 centímetros é uma aproximação melhor de 22 centímetros do que 25 centímetros!

Para corrigir essas *imprecisões* na medida, Marília, colega de Sofia, observou que

$$22 \times 22 = 484,$$

com apenas $500 - 484 = 16$ centímetros de erro na medida. Melhor ainda,

$$22 \times 23 = 506,$$

com erro ainda menor, de 6 centímetros na medida da trave.

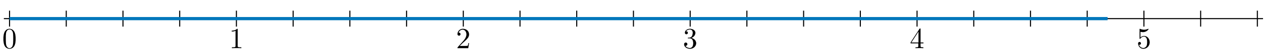


Figura 1.9: Medida do gol, usando a aproximação de 22 pés de Sofia

Figura 1.10: Medida do gol, usando a aproximação de 23 pés de Sofia

Assim, Sofia mediu, pé ante pé, uma medida equivalente a 23 pés, ou seja, 506 centímetros, aproximadamente. ■

Exercício 1.1 Como ficariam essas medidas das traves, considerando o tamanho dos pés de outras alunas do nono ano, conforme a tabela, com o padrão dos calçados brasileiros?

Aluna	Calçado	Tamanho
Aninha	34	22,6 cm
Isabel	35	23,3 cm

Observação 1.5 Se você já jogou futebol de rua, deve ter passado por situações como a do exercício. A lição que extraímos é de que é preciso **fixar** uma unidade de medida, seja o pé de Sofia ou o pé de Aninha, e **comparar** a grandeza que queremos medir com a unidade fixada: é claramente importante que "o mesmo pé" seja utilizado para medir ambos os gols. Ninguém vai querer que uma trave tenha o comprimento de 20 pés de um jogador adulto e o outro tenha 20 pés de um menino de três anos de idade.

Na situação descrita no exercício, se as alunas possuíssem uma régua ou fita métrica (trena), a medição seria mais *precisa*, diminuindo a *margem de erro*. Além disso, a vantagem é que o comprimento de um metro em qualquer trena de boa qualidade é (praticamente) o mesmo. Outra vantagem é que a fita métrica garante que a medida seja feita em linha reta. Enfim, para jogar futebol em um campinho, o importante mesmo é a bola e podemos, tranquilamente, dispensar a trena. Mas, o mesmo não pode ser dito se formos construir uma casa, quando a precisão do instrumento de medição e das medidas torna-se crucial.

A base das medidas de grandezas geométricas é a escolha de uma unidade de medida de comprimento de segmentos de retas, a partir da qual determinamos, **por comparação**, medidas de outros segmentos. Também a partir das medidas de comprimento, podemos definir medidas de área e volume, além de medidas de **grandezas relativas**, que envolvam *razões entre grandezas*, como densidade, vazão, fluxo, velocidade, dentre outras.

Exercício 1.2 As engenheiras Andrea e Márcia usaram uma fita métrica para medir as dimensões de um terreno em que farão uma quadra de futebol *society*, com 25 metros de largura e 45 metros de comprimento. Elas consideram, por segurança, um erro de 5 centímetros nas medidas de largura e comprimento que fizeram no terreno. Isso significaria um erro de quantos metros quadrados na área da quadra?

Solução. Se considerarmos a margem de erro nas medidas, a medida h da largura da quadra está no intervalo de 25 metros *menos* 5 centímetros a 25 metros *mais* 5 centímetros, ou seja,

$$25 - 0{,}05 < h < 25 + 0{,}05,$$

ao passo que a medida b do comprimento da quadra está no intervalo de 45 metros *menos* 5 centímetros a 45 metros *mais* 5 centímetros, ou seja,

$$45 - 0{,}05 < h < 45 + 0{,}05.$$

Logo, a medida $b \times h$ da área, em metros quadrados, está no intervalo de

$$\begin{aligned}(25 \pm 0{,}05)\times(45 \pm 0{,}05) &= 25\times 45 \pm 0{,}05\times(25+45) + (0{,}05)^2\\ &= 1\,125 \pm 3{,}5 + 0{,}0025.\end{aligned}$$

Observe que o primeiro termo seria a *área exata*, no caso em que as medidas lineares não tivessem erro algum; o segundo termo é a parte significativa do erro, que é **proporcional** ao perímetro do terreno; e a terceira parcela é um componente quadrático do erro que não consideraremos por ser muito pequena em comparação com as demais medidas.

Concluímos que o erro é da ordem de 3,5 metros quadrados em um total de $1\,125 + 3{,}5 = 1\,128{,}5$ metros quadrados, ou seja, algo como 0,3% de erro na medição da área. ∎

Em resumo, para efetuarmos medidas de uma dada grandeza, começamos definindo uma unidade de medida, seja baseada na tradição histórica ou no cotidiano (como pés, braças, arrobas, etc.), seja em conceitos científicos muito precisos e **universais**, como no caso do metro, do segundo e do *bit*. O propósito do **sistema de unidades de medida** é de que as medidas possam ser comunicadas sem ambiguidade, de modo universal, e possam ser **verificadas** e **reproduzidas**, segundo experimentos idênticos. Esse rigor é fundamental na atividade cientifica. Imagine, por exemplo, como os médicos prescreveriam uma dose de antibiótico ou de vacina sem os miligramas e milímetros.

No caso de comprimentos ou distâncias, precisamos definir um **segmento de reta padrão**, com o qual todos serão comparados. Os gregos acreditavam que dois segmentos quaisquer são **comensuráveis**, ou seja, que a *razão* entre suas medidas é um número racional da forma $\frac{m}{n}$. Isso significa que n cópias de um dos segmentos teria comprimento igual a m cópias do outro. Por exemplo, nas figuras seguintes, o segmento com medida ℓ equivale a $\frac{5}{4}$ do segmento de medida u, ou seja, 4 cópias do segmento de medida ℓ têm o mesmo comprimento de 5 cópias do segmento de medida u:

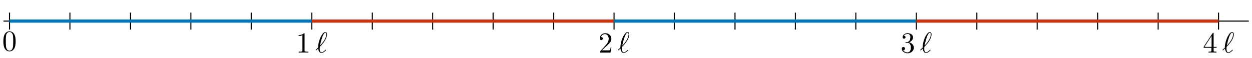


Figura 1.11: 4 segmentos de medida ℓ

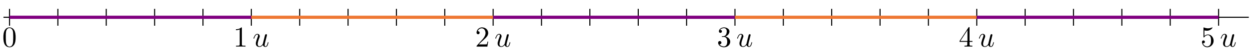


Figura 1.12: 5 segmentos de medida u

Observação 1.6 Essa concepção dos gregos, sobre a **comensurabilidade** de todas as medidas, ou seja, a suposição de que a *razão* ou *comparação* das medidas de dois segmentos quaisquer é sempre dada por um *número racional*, reflete a seguinte premissa filosófica:

"o homem é a medida de todas as coisas."

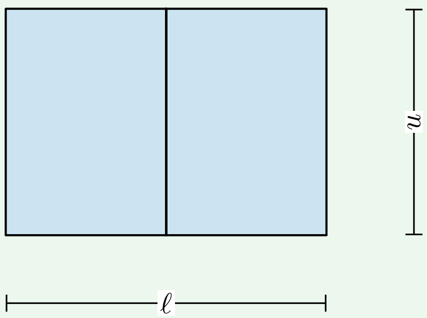
Embora essa ideia tenha um forte apelo filosófico e uma profunda beleza matemática, não é verdadeira! A descoberta de que há dois segmentos **não-comensuráveis** ocorreu na própria Grécia Clássica, no seio da Escola Pitagórica, cujos asseclas professavam a crença na comensurabilidade de todas as medidas!

Antes de discutirmos esse ponto mais detalhadamente, realizemos um experimento prático, inspirado no artigo “A matemática da folha de papel A4”, da autoria de José Luiz Pastore Mello, disponível em https://www.rpm.org.br/cdrpm/66/11.html

Exercício 1.3 Tente fazer medidas bem precisas dos lados de uma folha de papel A4, o formato comum das folhas de papel ofício ou, provavelmente, de um caderno desses de 10 matérias ou mais. Use uma régua ou fita métrica para isso e faça as seguintes medições:

1) altura da folha, isto é, medida do lado de menor comprimento;
2) largura da folha, isto é, medida do lado de maior comprimento;
3) a *razão* entre a altura e a largura da folha;
4) área da folha;
5) medida da **diagonal** da folha.

Observação 1.7 A figura seguinte representa uma folha de papel A4, cujas medidas têm a seguinte propriedade: ao dividirmos a folha ao meio, na direção de sua largura ℓ (maior dimensão), a largura de cada metade, isto é, $\ell/2$, é igual à altura u (menor dimensão) da folha original



Observe que, tendo em conta que a metade da folha é proporcional à folha inteira, obtém-se:

$$\frac{\ell}{u} = \frac{u}{\ell/2},$$

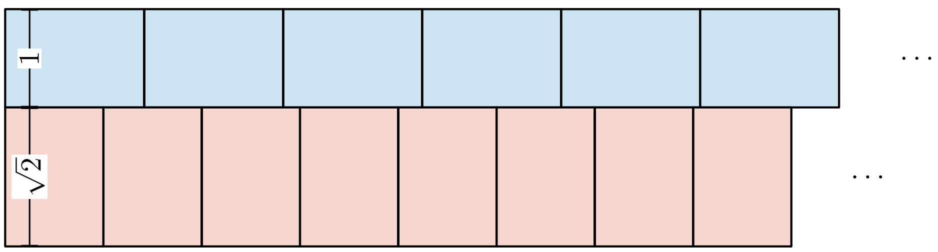
ou seja,

$$\ell^2 = 2u.$$

Assim, concluímos que

$$\ell = \sqrt{2}u.$$

No exemplo, acima, da folha de papel A4 a altura e a largura são medidas de segmentos não-comensuráveis: se colocarmos várias e várias folhas lado a lado, alinhadas por suas larguras, **jamais** obteremos o mesmo comprimento que várias folhas, alinhadas lado a lado, alinhadas segundo duas alturas.



O “problema”, aqui, é que a raiz quadrada de 2 não é um número racional, como discutiremos na seção 1.2.4 a seguir.

1.2 – Os números reais e a reta numérica

Na seção 1.1.5 anterior, mencionamos que, mesmo fixada uma unidade de medida de comprimento, nem todos os segmentos de reta terão medida **comensurável** ou **comparável** com a unidade fixada. Isso quer dizer que, seja qual for a medida u de comprimento fixada como unidade de medida, há segmentos tais que a *razão* entre sua medida ℓ e a medida u **não** é um número racional.

Nesta seção, mostraremos alguns exemplos de pares de segmentos, em figuras geométricas, que não são comensuráveis. Ou seja, mostraremos alguns exemplos de medidas que **não** são dadas por números racionais. Na próxima subseção, discutimos a relação entre medidas comensuráveis e números racionais. Na seguinte, mostramos alguns exemplos de medidas que não são dadas por números racionais, quando comparadas com uma dada unidade de medida.

1.2.1 – Números reais e medidas de segmentos

Nossa principal hipótese é a seguinte:

Fixada uma unidade de medida de comprimento (ou distância), todo segmento de reta possui uma medida, que será expressa por um **número real** positivo.

Veremos que nem todos os segmentos têm medidas dadas por números racionais. A hipótese acima diz que os números reais formam um conjunto numérico **completo**, em que podemos expressar as medidas de todos os segmentos de reta, uma vez fixada uma unidade de medida.

A partir dessa hipótese, é possível estabelecer uma **correspondência** entre os números reais (agora incluindo positivos e negativos) e os pontos de uma reta em que cada número corresponde a um único ponto, e vice-versa, como segue: em uma reta desenhada horizontalmente, escolha dois pontos distintos O e P, com P à direita de O (ver Figura 1.13). Identifique o ponto O com o número 0 e o ponto P como número 1 e defina o segmento OP como a unidade de comprimento. Isso estabelece uma orientação e

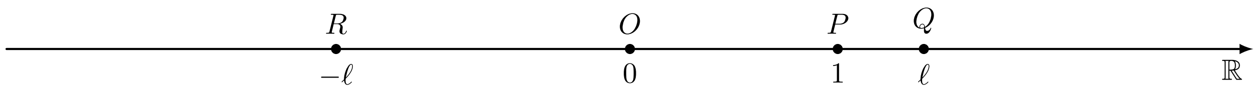


Figura 1.13: A reta numérica, fixada uma unidade de medida e uma orientação

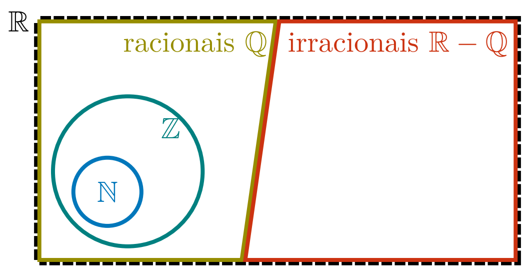
uma escala (ou unidade de medida) para a reta. Cada ponto da reta, à **direita** de O, como é o caso do ponto Q, está associado a um **número real positivo**: este número real ℓ é a *medida* do segmento de reta OQ cujos extremos são O e Q.

De modo similar, cada ponto da reta, à **esquerda** de O, está associado a um número real **negativo**: na figura este é o caso do ponto R, associado ao número real negativo $-\ell$. Note que o segmento OR, de O a R, tem a mesma medida do segmento de OQ, mas as orientações dos dois segmentos são diferentes: OR está orientado para a esquerda e OQ para a direita. Por essa razão, usamos os números reais $-\ell$ e ℓ, respectivamente, para fazer essa distinção.

Dada essa **correspondência** entre cada ponto da reta e a medida (orientada) do segmento determinado pela **origem** O e por este ponto, passamos a denominá-la de **reta numérica** ou **reta real**. A reta numérica é uma representação geométrica do **conjunto dos números reais** $\mathbb{R}$.

O conjunto dos números reais contém o conjunto dos números racionais que, por sua vez, contém o conjunto dos números inteiros, no qual está contido o conjunto dos números naturais, Temos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



1.2.2 – Medidas expressas por números inteiros

Recapitulando nosso estudo da correspondência entre medidas de segmentos de reta e números, começamos com o caso mais básico em que essas medidas são expressas por números inteiros. Em seguida, passamos para o caso em que as medidas podem ser expressas por números racionais não inteiros e, por fim, discutir medidas dadas por números reais que *não são* números irracionais.

Sejam ℓ a medida de um dado segmento e u a medida de um segmento que tem mesmo comprimento que o segmento OP na reta numérica. Ou seja, u tem o comprimento da unidade de medida. Se ℓ é dado por um número inteiro positivo m, então

$$\ell = mu,$$

ou seja, pondo m cópias do segmento u lado a lado, sem **sobreposição**, temos um segmento com comprimento **exatamente** igual a ℓ, como na figura seguinte:

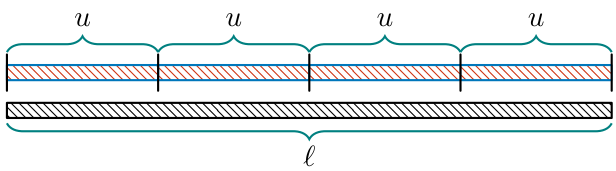


Figura 1.14: uma barra ℓ que mede 4 unidades de comprimento, já que sobre ℓ cabem exatamente 4 cópias de u.

Sendo assim, dizemos que ℓ mede m unidades de comprimento, ou seja, $\ell = m\,u$. De outro modo, dizemos que a *razão* entre ℓ e u é igual a m. Na Figura 1.14 temos um exemplo em que $m = 4$, ou seja, $\ell = 4u$.

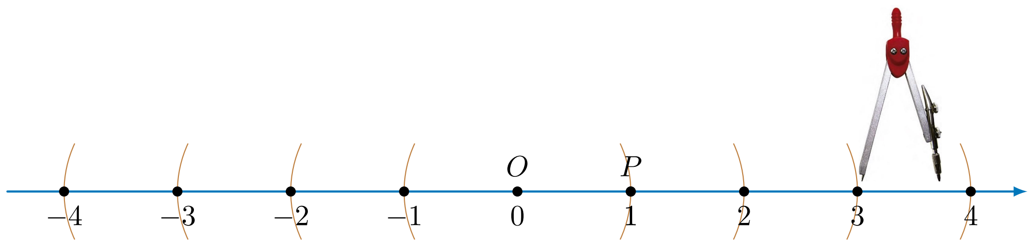
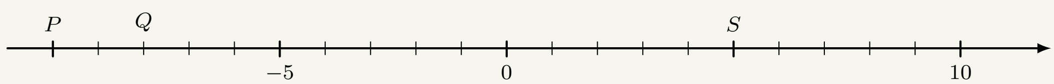


Figura 1.15: uma maneira prática e precisa de marcar números inteiros na reta real é utilizar um compasso. Fixe a abertura do compasso tomando por base o segmento OP; em seguida, use o compasso para marcar os pontos um a um, partindo de O em ambos os sentidos.

Partindo da origem O da reta numérica, podemos marcar os pontos que correspondem a números inteiros, marcando segmentos de comprimento 1 para a direita ou esquerda, como demonstado na figura acima.

Exercício 1.4 — SPAECE–2015. Observe a reta numérica da figura abaixo, a qual está dividida em segmentos de mesmas medidas. Os números representados pelos pontos P, Q e S são, respectivamente:

(a) -11, -3 e 6.
(b) -11, -5 e 6.
(c) -10, -3 e 5.
(d) -10, -8 e 5.



Solução. O número -5 está na quinta marca à esquerda do 0 e o número 10 na décima marca à direita do 0. Assim cada segmento entre duas marcas consecutivas tem medida 1. Como P e Q estão situados na décima e oitava marcas à esquerda de 0 e S está na quinta marca à direita, os números que os representam são -10, -8 e 5, respectivamente. Portanto, a resposta é (d). ■

Exercício 1.5 — Prova Brasil - adaptado. Uma professora da 4ª série pediu a uma aluna que marcasse numa linha do tempo o ano de 1940. Admitindo que o segmento dado na Figura 1.16 está dividido em partes iguais e que cada segmento representa um mesmo intervalo de tempo, assinale a alternativa que corresponde ao ponto que a aluna deve marcar para acertar a tarefa pedida.

(a) A.
(b) B.
(c) C.
(d) D.

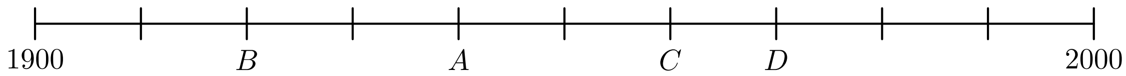


Figura 1.16: linha do tempo ao longo do século XX.

Solução. Admitamos que o segmento dado na Figura 1.16 está dividido em partes iguais (o que não foi dito explicitamente na questão) e que cada segmento representa um mesmo intervalo de tempo (o que também não foi dito no enunciado). Contando o número de partes, vemos que os 100 anos correspondentes ao intervalo entre 1900 e 2000 foram divididos em 10 partes iguais, ou seja, 10 décadas. Dessa forma, o ponto que corresponde ao ano de 1940 deve estar na quarta marca depois de 1900, isto é, deve ser o ponto A. ■

1.2.3 – Medidas expressas por números racionais

Pode ocorrer que, ao tentar expressar a medida ℓ de um segmento, comparando-a com a unidade de medida, que é o comprimento u do segmento OP, observamos que ℓ **não** equivale, exatamente, a um múltiplo inteiro (positivo) de u, ou seja, pode acontecer que

$$\ell \neq mu,$$

seja qual for o número inteiro positivo m. Pode ser necessário completar a medida com *frações* de u ou, de outro modo, pode ser preciso retirar-se uma fração da medida de u, para obtermos, precisamente, ℓ.

No caso mostrado na Figura 1.17 a seguir, a última cópia da unidade u não se ajusta exatamente ao segmento de comprimento ℓ. Para contornar essa dificuldade, dividimos o comprimento u da unidade de medida em partes iguais, obtendo **sub-múltiplos** da unidade de medida: na figura, consideramos $\frac{1}{5}u$ como esse sub-múltiplo, definindo uma nova unidade de medida. Agora, contamos quantas dessas sub-unidades serão necessárias para obtermos, exatamente, o comprimento ℓ:

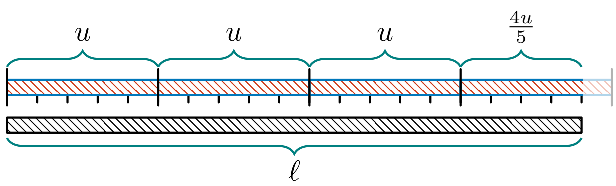


Figura 1.17: uma barra ℓ que mede $19/5$ unidades de comprimento u.

No exemplo da Figura 1.17 acima, 3 segmentos de comprimento u têm, juntos lado a lado, comprimento *menor* que ℓ: $3u$ seria uma aproximação **por falta** da medida de ℓ. Por outro lado, 4 segmentos de comprimento u têm, juntos lado a lado, comprimento *maior* que ℓ: $3u$ seria uma aproximação **por excesso** da medida de ℓ. Logo,

$$3u < \ell < 4u.$$

Para obtermos uma medida exata, procedemos como dito anteriormente: dividimos cada segmento de comprimento u em 5 segmentos de mesmo comprimento, de modo que cada um desses novos segmentos tem comprimento igual a $\frac{1}{5}u$. Observamos que, agora, alinhando, lado a lado,

$$5 + 5 + 5 + 4 = 19$$

desses segmentos de comprimento $\frac{1}{5}u$, obtemos um segmento de comprimento exatamente igual a ℓ, ou. seja,

$$\ell = \frac{19}{5}u.$$

Observe que

$$\ell = 3u + \frac{4}{5}u,$$

o que concorda com o fato de que

$$\frac{19}{5} = 3 + \frac{4}{5} = 3 + 0{,}8 = 3{,}8,$$

número **racional** não-inteiro entre 3 e 4.

Observação 1.8 A comparação entre ℓ e u, dada por

$$\ell = \frac{19}{5}u,$$

significa que

$$5\ell = 19u,$$

ou seja, 5 cópias do segmento ℓ têm exatamente o mesmo comprimento de 19 cópias do segmento u. Pensando de outra forma, a **comensurabilidade** ou **comparabilidade** dos segmentos de medidas ℓ e u significa que podemos encontrar um segmento cuja medida p é tal que

$$u = 5p \quad \text{e} \quad \ell = 19p$$

Note que, na figura acima, cada um dos segmentos menores tem medida igual a $p = \frac{1}{5}u$.

Observação 1.9 No caso que discutimos na seção 1.1.5, tínhamos

$$\ell = \frac{5}{4}u.$$

Neste caso, vimos que

$$4\ell = 5u,$$

como demonstram as seguintes figuras:

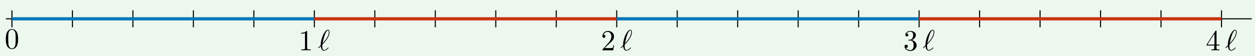


Figura 1.18: 4 segmentos de medida ℓ

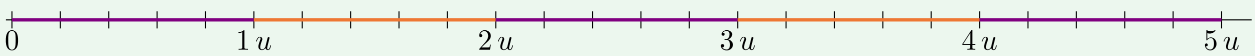


Figura 1.19: 5 segmentos de medida u

Com esse entendimento, fixada a unidade de medida u, que é o comprimento do segmento OP, podemos marcar, sobre a reta numérica, qualquer ponto Q tal que o comprimento ℓ de OQ seja um **múltiplo racional** de u, isto é, tal que

$$\ell = \frac{m}{n}u,$$

onde m, n são números naturais, com $n \neq 0$. Essa relação de **comensurabilidade** ou **comparabilidade** significa que

$$n\,\ell = m\,u,$$

ou seja, que n cópias de OQ têm mesmo comprimento que m cópias de OP. Por exemplo, para marcar o ponto Q cuja distância (positiva) a O é igual a $\frac{9}{4}$, podemos dividir o segmento unitário OP em 4 partes iguais e depois tomar, lado a lado, 9 dessas partes, movendo-se para a direita a partir de O (pois $\frac{9}{4}$ é positivo), conforme a seguine figura:

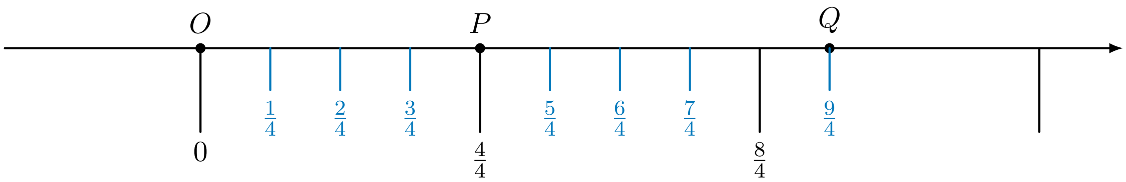
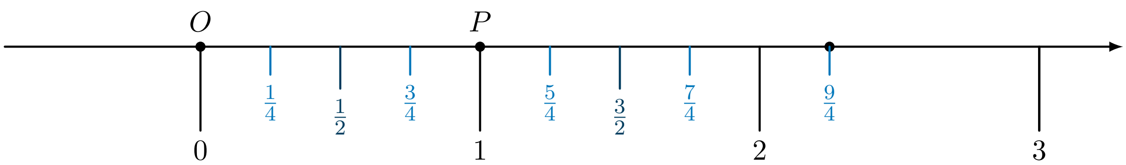


Figura 1.20: o ponto Q sobre a reta numérica, cuja distância a O é igual a $\frac{9}{4}$.

Observe que $\frac{4}{4} = 1$, $\frac{8}{4} = 2$ e $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Partindo de O, para chegar ao ponto Q, nos deslocamos $\frac{9}{4}$ unidades para a direita, ou seja, 2 unidades, seguidas de $\frac{1}{4}$, sempre para a direita. Isso demonstra, geometricamente, que $\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$.



Exercício 1.6 Marque, sobre a reta numérica, todos os números da forma $\frac{m}{2}$, onde m é um inteiro que satisfaz $-6 \leq m \leq 6$.

Solução. Devemos dividir o segmento unitário em duas partes iguais (ou seja, ao meio), a fim de marcar o número $\frac{1}{2}$ sobre a reta. Em seguida, marcamos os múltiplos positivos e negativos desta subunidade, para a direita e para a esquerda da origem, respectivamente, como na Figura 1.21. Como $-6 \leq m \leq 6$, temos 6 múltiplos de $1/2$ para cada lado. Em tal figura, quando o resultado da divisão $m/2$ é um inteiro, resolvemos por anotar apenas o resultado dessa divisão (por exemplo, escrevemos 1 no lugar de $\frac{2}{2}$, escrevemos 2 no lugar de $\frac{4}{2}$, etc), e usamos "marcas" maiores para os números inteiros (isso não é obrigatório, mas facilita bastante a leitura e interpretação da figura). ■

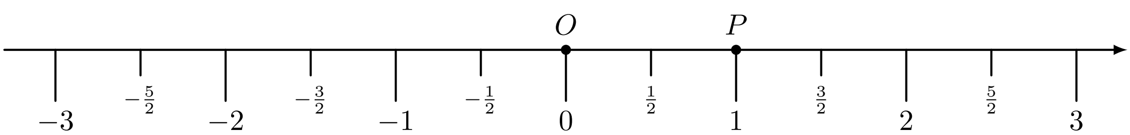


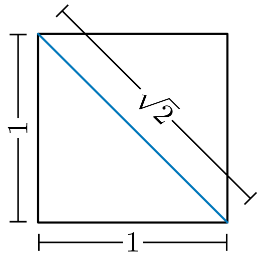
Figura 1.21: a reta númerica, marcada com alguns números da forma $\frac{m}{2}$, onde $m \in \mathbb{Z}$.

1.2.4 – Algumas medidas expressas por números irracionais

Consideremos os seguintes problemas geométricos:

Problema 2 Determine o comprimento da diagonal de um quadrado cujo lado mede 1 unidade de comprimento.

Solução. A figura seguinte representa um quadrado cujo lado mede 1 unidade de comprimento, destacando-se sua diagonal:



Nessa figura, a diagonal do quadrado é a *hipotenusa* de um triângulo retângulo cujos catetos são dois dos lados do quadrado, ambos com medida igual a 1 unidade de comprimento. Pelo Teorema de Pitágoras, o quadrado da medida da hipotenusa, ℓ^2, é a soma dos quadrados das medidas dos catetos, isto é,

$$\ell^2 = 1^2 + 1^2.$$

Assim,

$$\ell^2 = 2.$$

Logo,

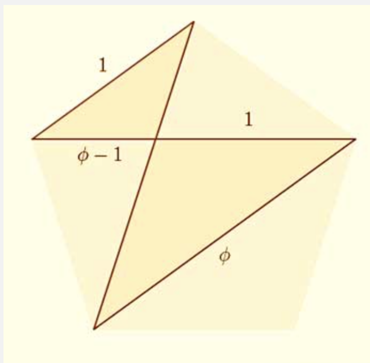
$$\ell = \sqrt{2}.$$

Lembre-se que $\sqrt{2}$, a raiz quadrada de 2, é o número real cujo quadrado é igual a 2, isto é,

$$\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 2.$$

Concluímos que o comprimento da diagonal do quadrado é igual a $\sqrt{2}$ unidades de comprimento. ■

Problema 3 Determine o comprimento da diagonal de um pentágono regular cujo lado mede 1 unidade de comprimento.



Matematicas Visuales. Disponível em
http://www.matematicasvisuales.com/english/html/geometry/goldenratio/pentagondiagonal.html

Solução. A figura indica triângulos semelhantes: usando as relações de semelhança entre lados correspondentes nos triângulos, temos

$$\frac{\phi - 1}{1} = \frac{1}{\phi}.$$

Assim, multiplicando cada um dos lados por ϕ, temos:

$$\phi(\phi - 1) = 1.$$

Logo,

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Para resolver essa equação quadrática, *completamos quadrados*, obtemos:

$$\phi^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1 = 0.$$

Assim,

$$\left(\phi - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Como ϕ é positivo, concluímos que

$$\phi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

■

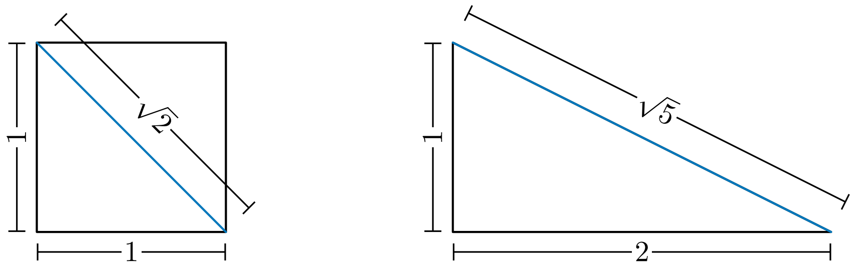
Observação 1.10 Na página seguinte, você pode encontrar uma “demonstração sem palavras” da relação de proporcionalidade entre o lado e a diagonal do pentágono regular:

http://www.matematicasvisuales.com/english/html/geometry/goldenratio/pentagondiagonal.html

O número $\sqrt{5}$, que aparece no Problema 3, significa um número cujo quadrado é igual a 5, isto é, tal que

$$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5.$$

Esse número é o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos de comprimentos iguais a 1 e 2, como ilustrado na seguinte figura:



Problema 4 Determine a **secção** ou **razão áurea** de um segmento: devemos dividir um segmento em duas partes, com comprimentos a e b, com $a > b > 0$, tais que

a maior parte está para a menor, assim como a soma das partes está para a maior,

ou seja,

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Solução. Multiplicamos ambos os lados da relação de proporcionalidade

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

por $\frac{a}{b}$, temos

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b} + 1.$$

Denotando $\phi = \frac{a}{b}$, temos a equação quadrática

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0,$$

cuja solução é a *razão áurea*

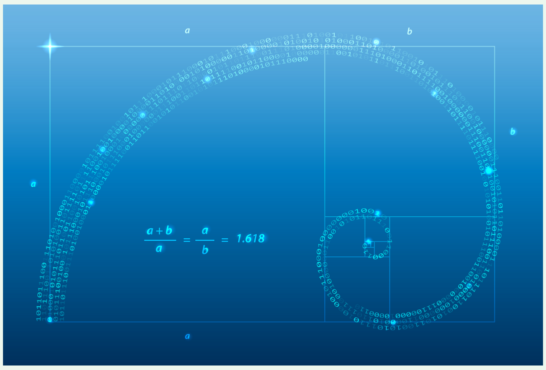
$$\phi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

que já apareceu no Problema 3 anterior. Concluímos que a razão entre as partes a e b é dada pela razão áurea

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

■

Observação 1.11 A razão áurea aparece em vários contextos em Matemática, como associada a sequências de Fibonacci e à espiral aritmética de Arquimedes. Em Arquitetura, está na base da definição do *retângulo áureo*, cujos lados são $a+b$ e a, na proporção áurea, conforme a seguinte figura:

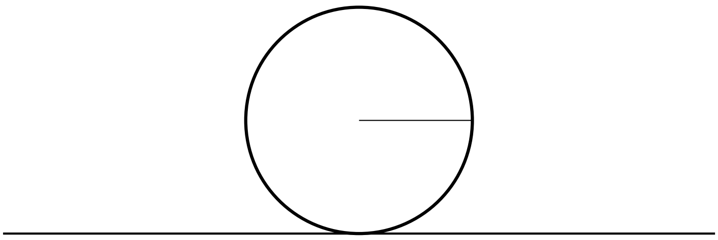


Gold vector created by macrovector-official. Disponível em
https://www.freepik.com/free-vector/golden-ratio_4559751.htm

Problema 5 Determine o comprimento da circunferência de um círculo cujo raio mede 1 unidade de comprimento.

Solução. A solução deste problema será discutida detalhadamente nos cadernos sobre Geometria. Por ora, lembramos que a *razão* entre a circunferência C e o diâmetro d do círculo é dada por

$$\frac{C}{d} = \pi.$$



No caso particular em que o raio mede 1 unidade de comprimento e, portanto, o diâmetro d é dado por duas unidades de comprimento, temos $C = 2\pi$. Na figura acima, vê-se um segmento de reta abaixo do círculo, que corresponde a “desenvolver” a circunferência rolando-a sem deslizar. ■

Os números reais positivos $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e π são exemplos de números irracionais.

Observação 1.12 Vamos demonstrar que $\sqrt{2}$ *não é um número racional*, usando o método chamado de *redução ao absurdo*: começamos supondo que $\sqrt{2}$ é um número racional e chegaremos, por deduções lógicas, a uma conclusão falsa.

Suponhamos, pois, que $\sqrt{2}$ é um número racional. Nesse caso, $\sqrt{2}$ pode ser representado por uma

fração irredutível, ou seja, existem números naturais m e n, com $n \neq 0$, tais que

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Além disso, m e n não possuem divisores comuns. Sendo assim, temos:

$$m = \sqrt{2}n$$

e, elevando cada um dos lados ao quadrado, obtemos:

$$m^2 = 2n^2.$$

Logo, 2 é fator de m^2, ou seja, m^2 é um número par. Portanto, m deve ser par, pois, se m fosse ímpar, m^2 seria ímpar (verifique!). No entanto, como m é par, m^2 é divisível por $4 = 2 \times 2$. Logo, 2 deve ser fator de n^2. Concluímos, como antes, que n é um número par.

Deduzimos, por esses passos lógicos, que m e n são números pares, ou seja, que esses números têm 2 como um *fator comum*. Isso contradiz o fato de que m e n são números sem fatores comuns

Exercício 1.7 Use a ideia acima para mostrar que $\sqrt{5}$ é um número irracional, ou seja, um número real não-racional. (Sugestão: supondo, por redução ao absurdo, que $\sqrt{5} = m/n$, com m e n naturais e $n \neq 0$, considere as possibilidades de m ou n serem ou não múltiplos de 5.)

Exercício 1.8 De modo geral, é possível mostrar que, para qualquer número natural primo p, o número $\sqrt{p}$ é irracional. Demonstre essa afirmação.

Solução. Por redução ao absurdo, suponha que, dado um número natural primo, sua raiz quadrada $\sqrt{p}$ seja um número racional, representado por uma fração *irredutível*:

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n},$$

onde m e n são números naturais, com $n \neq 0$, de modo que m e n não tem fatores comuns (além de 1, claro). Assim,

$$m = \sqrt{p}n$$

e, elevando ambos os lados ao quadrado, temos:

$$m^2 = pn^2.$$

Logo, p é um fator primo de m^2. Como p é primo, deve ser fator de m. Logo, m^2 é divisível por p^2. Assim, n^2 é divisível por p. Uma vez mais, como p é primo, segue que n deve ter p como fator. Logo, m e n deveriam ter p como fator comum, o que contradiz o fato de m e n **não** terem fatores comuns. ■

Observação 1.13 A demonstração de que π é um número irracional é mais complexa e envolve métodos que não são estudados na Matemática Básica. Recomendamos os seguintes materiais sobre a história do π e a demonstração de sua irracionalidade:

- https://www.youtube.com/watch?v=wCFj4_gDIU4
- https://www.youtube.com/watch?v=gMlf1ELvRzc
- http://www.ime.unicamp.br/~apmat/numero-pi/
- https://youtu.be/vY6965UdcLI
- O livro de Eli Maor, *Trigonometric delights*.

A discussão dos exemplos acima parece sugerir que números irracionais, ou seja, números reais não-racionais, são casos especiais, ou mesmo raros, e estão relacionados a contextos geométricos excepcionais. A verdade, também *surpreendente*, é de que, não bastasse existirem números irracionais, eles são muito mais frequentes que os números racionais na reta numérica! Ou seja, a irracionalidade de um número real, longe de ser a "exceção", é quase uma "regra". Vamos tornar essas afirmações um pouco mais precisas quando discutirmos a expansão decimal dos números reais, sejam racionais ou irracionais.

Por ora, observe que existem infinitos números irracionais: de fato, como existem infinitos números primos (o matemático Euclides provou este teorema), existem infinitos números da forma $\sqrt{p}$, onde p é um número primo. Logo, o exercício 1.8 implica que os infinitos números da forma $\sqrt{p}$, onde p é primo, são todos números irracionais. Para ampliarmos nossa lista de exemplos, façamos duas observações:

Observação 1.14 As operações de adição e multiplicação são **fechadas** nos números racionais $\mathbb{Q}$, ou seja, dados números racionais

$$x = \frac{m}{n} \quad \text{e} \quad y = \frac{p}{q},$$

onde m, n, p, q são números naturais, com $n \neq 0, q \neq 0$, a soma

$$x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$$

e o produto

$$x \cdot y = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$

são também números racionais. De modo sucinto,

$$\text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad y \in \mathbb{Q}, \quad \text{então} \quad x + y \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad x \cdot y \in \mathbb{Q}.$$

Observação 1.15 Recorde-se que o *oposto* ou *simétrico* de um número racional

$$x = \frac{m}{n},$$

onde m, n, são números naturais, com $n \neq 0$ é o número racional dado por

$$-x = \frac{-m}{n}.$$

Sendo assim, temos

$$x + (-x) = 0.$$

A diferença $y - x$ entre dois números racionais x e y é definida como a soma de y com o oposto de x, isto é,

$$y - x = y + (-x).$$

Finalmente, se $x \neq 0$ (ou seja, se $m \neq 0$), o *inverso* de x é o número racional

$$\frac{1}{x} = \frac{n}{m}.$$

Observe que

$$x \cdot \frac{1}{x} = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{mn}{nm} = 1.$$

O quociente de $y : x$ ou $\frac{y}{x}$ de dois números racionais, com $x \neq 0$, é definido como o produto de y pelo inverso de x, isto é,

$$\frac{y}{x} = y \cdot \frac{1}{x}.$$

Estudaremos essas *opreracões aritméticas* com mais detalhes nos cadernos seguintes.

Voltando à discussão sobre a **infinidade dos números irracionais**, observamos, inicialmente, que, dado um número primo p e um número racional $x = \frac{m}{n} \neq 0$, o produto

$$y = x \cdot \sqrt{p}$$

é também irracional. Se o produto y fosse um número racional (não-nulo) da forma $\frac{p}{q}$, teríamos

$$\sqrt{p} = \frac{y}{x} = \frac{p}{q}\frac{n}{m} = \frac{pn}{qm},$$

ou seja, $\sqrt{p}$ seria um número racional, o que é uma **contradição** com o fato de que $\sqrt{p}$ é um número irracional. Logo, nossa *premissa* é falsa, ou seja, concluímos que os números da forma

$$x\sqrt{p},$$

onde $x \in \mathbb{Q}$ e p é um número primo, são números irracionais. De modo similar, demonstramos que são **irracionais** todos os números da forma

$$X + x\sqrt{p},$$

onde X, x são números racionais e p é um número primo. Logo, existe uma infinidade de números irracionais na reta numérica $\mathbb{R}$.

Deduzimos, desse modo, que o conjunto dos números irracionais em $\mathbb{R}$ é infinito. De fato, provamos algo mais: que há, *pelo menos*, tantos números irracionais quanto números racionais. Ou seja, podemos colocar pelo menos um sub-conjunto dos números irracionais em **correspondência** biunívoca com *pares* de números racionais da seguinte forma:

$$(X, x) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \mapsto X + x\sqrt{p}.$$

Porém, outro fato *desconcertante* é de que a "quantidade" de números irracionais em $\mathbb{R}$ é "muito maior" do que a "quantidade" de números racionais. Usamos aspas nessas expressões porque, de fato, tanto o conjunto dos números racionais quanto o conjunto dos números irracionais têm **infinitos** elementos. No entanto, o matemático Georg Cantor, no século XIX, descobriu uma maneira muito engenhosa de atribuir diferentes quantidades (*cardinalidades* seria a expressão correta) a conjuntos com infinitos elementos: há mais de um tipo de quantidade ou cardinalidade infinita, ou seja, há mais de um tipo de "infinito".

Por exemplo, a quantidade infinita de números naturais, no conjunto $\mathbb{N}$, é chamada da *enumerável*: na verdade, essa é a própria definição dos números naturais, que são usados para *contar*. Embora não pareça, os números racionais, no conjunto $\mathbb{Q}$, podem ser colocados em **correspondência** biunívoca com os números naturais: em outras palavras, podemos *contar* os números racionais, associando a cada número em $\mathbb{Q}$ um número natural. Formas de fazer isso estão descritas neste vídeo, por exemplo:

https://www.youtube.com/watch?v=fPWoKCGIJ4s

Com os números reais, a situação é radicalmente diferente: não é possível *contar* os números reais, ou seja, colocá-los em **correspondência** biunívoca com os números naturais: para que fosse possível contá-los, precisaríamos "separá-los" um a um e, para cada número real, associar um número natural. Cantor demonstrou, com seu processo de diagonalização, que essa contagem é impossível, ou seja, que os números reais não são **enumeráveis**. Veja, a este propósito, os vídeos

- https://youtu.be/_aXwKJk8oBw
- https://youtu.be/WQWkG9cQ8NQ
- https://youtu.be/fPWoKCGIJ4s

Como $\mathbb{Q}$ é enumerável e $\mathbb{R}$ é não-enumerável, temos, aqui, dois exemplos de diferentes infinitos: o infinito enumerável dos números racionais é um exemplo de um conjunto infinito **discreto**, em que seus elementos podem ser "separados" uns dos outros. Já o infinito não-enumerável dos números reais corresponde ao modelo **contínuo** da reta numérica, em que os pontos não podem ser "separados" ou 'ìsolados" uns dos outros.

Deduzimos, em particular, que há infinitos números irracionais em uma quantidade que não pode ser contada, isto é, o conjunto dos números irracionais em $\mathbb{R}$ **não** é enumerável, diferentemente, portanto, do conjunto dos números racionais.

Para uma biografia de Georg Cantor, recomendamos começar por este *link*: https://www.youtube.com/watch?v=0J6GiWoKeMk

Observação 1.16 Essas questões são profundamente filosóficas e estão nos fundamentos lógicos da Matemática. Mas, ao mesmo tempo, são de crucial importância nos desenvolvimentos científicos e tecnológicos, por exemplo, que levaram à era da Computação!

Além disso, veremos, nas próximas seções, como esses problemas estão relacionados à expansão decimal dos números reais, essencial para a notação científica usada em todos as áreas do conhecimento, especialmente nas Ciências e Tecnologia.

1.3 – Números reais e suas representações decimais

Na seção 1.1.4, trabalhamos a expansão decimal de números racionais: um número racional é representado por uma sequência de frações equivalentes umas às outras, como em

$$\frac{9}{8} = \frac{18}{16} = \frac{27}{24} = \ldots$$

Cada uma dessas frações, por sua vez, pode ser expandida em potências de dez, tanto negativas quanto positivas, na forma de um **número decimal**. Por exemplo, vimos que

$$\frac{9}{8} = 1 + 1\times\frac{1}{10} + 2\times\frac{1}{100} + 5\times\frac{1}{1\,000} = 1{,}125.$$

Podemos representar essa expansão decimal, geometricamente, na reta numérica, usando *escalas* cada vez menores, associadas a **submúltiplos** da unidade de medida, ou seja, a **subunidades**:

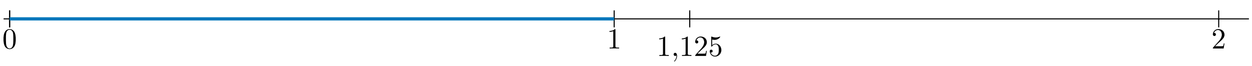


Figura 1.22: Aproximação de segmento de medida igual a $\frac{9}{8} = 1{,}125$ na escala de 1 unidade de medida

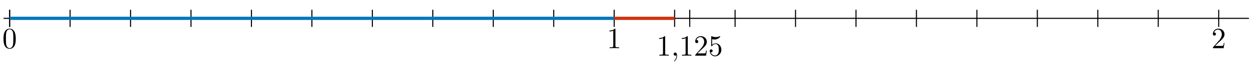


Figura 1.23: Aproximação de segmento de medida igual a $\frac{9}{8} = 1{,}125$ na escala de $\frac{1}{10}$ da unidade de medida

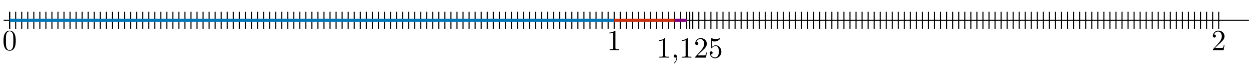


Figura 1.24: Aproximação de segmento de medida igual a $\frac{9}{8} = 1{,}125$ na escala de $\frac{1}{100}$ da unidade de medida

Em cada segmento, usamos aproximações sucessivas do número $\frac{9}{8}$ ou de sua representação decimal 1,125: aproximamos por 1, usando a escala da unidade de medida; na segunda reta, por 1,1, usando a subunidade de $\frac{1}{10}$ da unidade de medida, em uma escala 10 vezes menor que a original; na terceira, por 1,12, em termos da subunidade de $\frac{1}{100}$ da unidade de medida, em uma escala 100 vezes menor que a original.

A aproximação seguinte, usando a subunidade de $\frac{1}{1\,000}$ da unidade de medida, é representada na reta por uma escala 1 000 vezes menor, o que já dificulta a visualização. Para contornar essa dificuldade, podemos dar um "zoom" após outro na reta numérica, sempre ampliando 10 vezes, a cada "zoom", a figura anterior. Procedendo assim, obtemos a seguinte sequência de ampliações:

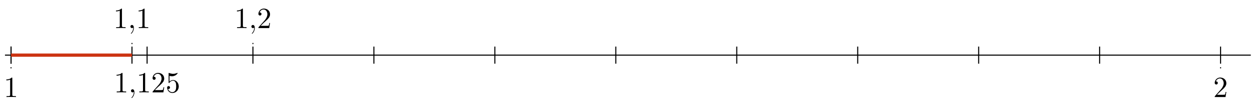


Figura 1.25: Aproximação de segmento de medida igual a $\frac{9}{8} = 1{,}125$ na escala de $0{,}1 = \frac{1}{10}$ da unidade de medida

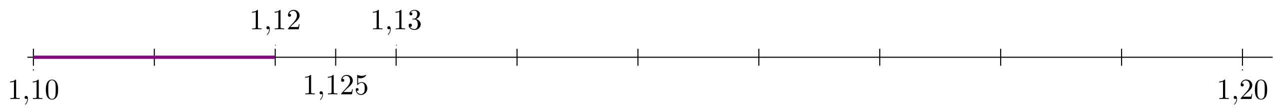


Figura 1.26: Aproximação de segmento de medida igual a $\frac{9}{8} = 1{,}125$ na escala de $0{,}01 = \frac{1}{100}$ da unidade de medida

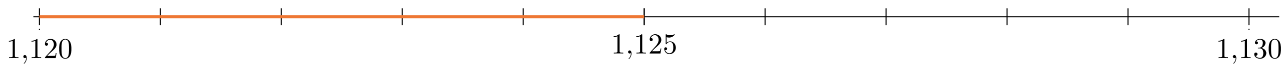


Figura 1.27: Aproximação de segmento de medida igual a $\frac{9}{8} = 1{,}125$ na escala de $0{,}001 = \frac{1}{1\,000}$ da unidade de medida

Discutamos, agora, o exemplo da expansão decimal do número racional representado pela fração $\frac{9}{7}$. Na seção 1.1.4, calculamos:

$$\frac{9}{7} = 1{,}285714285714285714\ldots$$

onde as reticências indicam que esta expansão decimal é *infinita*. Observe que a sequência 285714 aparece *periodicamente* na expansão. Portanto, temos um exemplo de uma expansão decimal infinita periódica.

Concluímos que há números racionais cujas expansões são

- finitas;
- infinitas e periódicas.

Podemos *demonstrar* que todos os números racionais têm expansões decimais de um desses dois tipos. De modo mais geral, podemos provar que um número real tem expansão decimal finita ou infinita periódica se, e somente se, é, de fato, um número racional. Portanto, os números irracionais são os números reais cujas expansões são **infinitas** e **não-periódicas**.

Vejamos mais alguns exemplos dessas diferentes situações. Iniciemos por um exemplo de número racional com expansão decimal **finita**. Temos, por exemplo, as frações que equivalem às divisões *sucessivas* de 9 por potências de 2, isto é, por 2, por 4, por 8, e assim por diante:

$$\frac{9}{2} = 4{,}5 \qquad \frac{9}{4} = 2{,}25 \qquad \frac{9}{8} = 1{,}125 \qquad \cdots$$

Como 2 e 5 são fatores de 10, divisões por múltiplos de 2 e 5 geram expansões decimais finitas. Dado um número natural m, temos:

$$\frac{m}{2} = 5 \times \frac{m}{10} \qquad \text{ou} \qquad \frac{m}{5} = 2 \times \frac{m}{10}.$$

Exemplos de expansões decimais infinitas, mas periódicas, são dadas pelas seguintes divisões pelo número 3:

$$\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots \qquad \frac{4}{3} = 1{,}333\ldots \qquad \frac{8}{3} = 2{,}666\ldots \qquad \cdots$$

De fato, temos, no primeiro desses exemplos, a seguinte expansão infinita:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} = \frac{1}{10}\times\frac{20}{3} = \frac{1}{10}\times\frac{1}{3}\times(3\times6+2) &= \frac{1}{10}\times6 + \frac{1}{10}\times\frac{2}{3}\\ &= \frac{1}{10}\times6 + \frac{1}{10}\times\left(\frac{1}{10}\times6 + \frac{1}{10}\times\frac{2}{3}\right)\\ &= \frac{1}{10}\times6 + \frac{1}{100}\times6 + \frac{1}{100}\times\frac{2}{3} = \ldots\end{aligned}$$

e assim indefinidamente! Note que, a cada *iteração* ou passo do algoritmo da divisão, a fração $\frac{2}{3}$ reaparece, multiplicada por potências negativas de 10.

Outra sequência de exemplos de números racionais com expansões decimais infinitas, mas periódicas, são obtidas pelas seguintes divisões por 7 ou por múltiplos de 7:

$$\frac{2}{7} = 0{,}285714\ldots \qquad \frac{3}{7} = 0{,}428571\ldots \qquad \frac{5}{7} = 0{,}714285\ldots \qquad \cdots$$

Exercício 1.9 Verifique essas expansões de $2/7$, $3/7$ e $5/7$. Você observou algo de interessante sobre os algarismos que formam essas expansões? Qual seria a expansão de $4/7$? E de $10/7$?

1.3.1 – Das expansões decimais às frações

Na seção anterior, vimos vários exemplos de expansões decimais, tanto finitas quanto infinitas e periódicas, que representam números racionais. Ou seja, dada uma fração, encontramos sempre uma expansão decimal finita ou infinita e periódica que a representa.

No entanto, precisamos também demonstrar que **toda** expansão decimal finita ou infinita e periódica representa uma fração e, portanto, um número racional. Uma **prova** rigorosa desse **teorema** está além dos objetivos desse texto. No entanto, podemos ilustrar algumas ideias ou **evidências** dessa correspondência. Ou seja, podemos mostrar exemplos de como partir de uma expansão decimal (finita ou infinita e periódica) e determinar a fração (o número racional) representada por essa dada expansão.

Por exemplo, consideremos a **dízima periódica**, ou seja, a expansão decimal infinita periódica dada por

$$0{,}666\ldots$$

que, como já vimos, é uma representação decimal da fração $\frac{2}{3}$. Comprovemos esse fato de outro modo. Para tanto, escrevemos

$$\begin{aligned}x &= 0{,}666\ldots\\ &= 0{,}6 + 0{,}06 + 0{,}006 + \ldots\\ &= 0{,}6 + \frac{1}{10}\times0{,}6 + \frac{1}{10}\times0{,}06 + \ldots\\ &= 0{,}6 + \frac{1}{10}\times\left(0{,}6 + 0{,}06 + \ldots\right)\\ &= 0{,}6 + \frac{1}{10}\times x\end{aligned}$$

Note que a expressão entre parênteses, depois da quarta igualdade, tem *infinitas* parcelas e é *exatamente* igual a x. Concluímos que

$$x - \frac{1}{10}x = 0{,}6,$$

ou seja,

$$\frac{9}{10}x = \frac{6}{10}.$$

Assim, o número racional, ou seja a fração, representada pela dízima periódica $0{,}666\ldots$ é dado por

$$x = \frac{6}{9},$$

ou seja, por $x = \frac{2}{3}$.

Observação 1.17 Pode ser demonstrado que **toda** dízima periódica, ou seja, toda expansão decimal infinita e periódica representa uma fração, que será chamada **fração geratriz** da dízima periódica.

Vejamos alguns exemplos de determinação da fração geratriz no seguinte exercício:

Exercício 1.10 Determine a **fração geratriz**, isto é, o número racional na forma fracionária representado pelas seguintes dízimas periódicas:

1) 0,616161 . . ..
2) 2,476666 . . .

Solução. 1) Escrevemos

$$x = 0{,}616161\ldots,$$

de modo que

$$\begin{aligned} x &= 0{,}61 + 0{,}0061 + 0{,}000061 + \ldots \\ &= 0{,}61 + \frac{1}{100}\times 0{,}61 + \frac{1}{100}\times 0{,}0061 + \ldots \\ &= 0{,}61 + \frac{1}{100}\times\Big(0{,}61 + 0{,}0061 + \ldots\Big) \\ &= 0{,}61 + \frac{1}{100}\times x. \end{aligned}$$

Concluímos que

$$x - \frac{1}{100}x = 0{,}61,$$

ou seja, que

$$\frac{99}{100}x = \frac{61}{100}.$$

Assim, a fração geratriz procurada é

$$x = \frac{61}{99}$$

2) Desta vez, denotando por y a fração geratriz, temos

$$\begin{aligned} y &= 2{,}47 + 0{,}006 + 0{,}0006 + 0{,}00006 + \ldots \\ &= 2{,}47 + \frac{1}{100}\times 0{,}6 + \frac{1}{100}\times 0{,}06 + \frac{1}{100}\times 0{,}006 + \ldots \\ &= 2{,}47 + \frac{1}{100}\times\Big(0{,}6 + 0{,}06 + 0{,}006 + \ldots\Big) \\ &= 2{,}47 + \frac{1}{100}\times\frac{6}{9} \\ &= \frac{247}{100} + \frac{6}{900} \end{aligned}$$

Concluímos que a fração geratriz, nesse caso, é dada por

$$y = \frac{247\times 9 + 6}{900} = \frac{2229}{900}$$

■

Observação 1.18 Tente descobrir um padrão na forma da fração geratriz! Isso tornará nossos cálculos bem mais rápidos e diretos.

O seguinte exercício é educativo, pois nos alerta para as *sutilezas* das somas que estamos realizando e que envolvem as *infinitas* parcelas nas dízimas periódicas. Se não levarmos em conta que estamos lidando com a noção de infinito, podemos chegar a paradoxos e erros lógicos ou matemáticos facilmente.

Exercício 1.11 Demonstre que o número 1 tem a seguinte expansão decimal na forma de dízima periódica:

$$1 = 0{,}99999\ldots$$

Solução. Assim como nos cálculos anteriores, escrevemos

$$\begin{aligned} x &= 0{,}999\ldots \\ &= 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \ldots \\ &= 0{,}9 + \frac{1}{10}\times(0{,}9 + 0{,}09 + \ldots) \\ &= 0{,}9 + \frac{1}{10}\times x \end{aligned}$$

Logo,

$$x - \frac{1}{10}x = \frac{9}{10}.$$

Deduzimos que

$$\frac{9}{10}x = \frac{9}{10}$$

e, portanto, $x = 1$. ■

Observação 1.19 Acabamos de demonstrar, rigorosamente, que $0{,}999\ldots = 1$. Pelo fato de termos *infinitos* algarismos iguais a 9 na expansão decimal *infinita*, o resultado é *exatamente* igual a 1. Se usássemos apenas expansões finitas como, por exemplo, em 0,99 ou 0,999 ou 0,999999, o resultado obtido seria *aproximadamente* igual a 1, mas diferente de 1 (de fato, menor que 1). Portanto, podemos considerar que as expansões decimais finitas são *aproximações*, cada vez melhores e mais precisas, da expansão decimal infinita.

Observação 1.20 Ao trabalhar com dízimas periódicas, devemos ser cuidadosos em tentar aplicar os algoritmos da adição e multiplicação como fazemos no caso das expansões decimais finitas. Por exemplo, é valido que

$$2 \cdot 0{,}333\ldots = 0{,}666\ldots,$$

pois

$$2 \cdot 0{,}333\ldots = 2\times\frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$$

Da mesma forma, temos

$$\frac{1}{9} + \frac{4}{9} = 0{,}111\ldots + 0{,}444\ldots = 0{,}555\ldots = \frac{5}{9}$$

Todavia, não é tão **imediato** realizar a soma

$$\frac{2}{7} + \frac{5}{7} = 0{,}285714\ldots + 0{,}714285\ldots = 0{,}999999\ldots$$

usando as expansões decimais infinitas, embora saibamos, obviamente, que

$$\frac{2}{7} + \frac{5}{7} = \frac{7}{7} = 1.$$

Analogamente, não é muito óbvio como calcular $2 \cdot 0{,}666\ldots$. Não é claro o que deve ser feito com o "vai um" ao realizar a "distributividade" do fator 2 com as infinitas parcelas da soma infinita em 0,666 . . .. Esse problema pode ser evitado, lidando-se diretamente com as frações geratrizes das dízimas periódicas. Por exemplo,

$$2 \cdot 0{,}666\ldots = 2 \cdot \frac{6}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1{,}333\ldots.$$

Exercício 1.12 Calcule o resultado da divisão a seguir:

$$\frac{6{,}444\ldots}{1{,}222\ldots}$$

Solução. Inicialmente, temos

$$6{,}444\ldots = 6 + 0{,}444\ldots = 6 + \frac{4}{9} = \frac{58}{9}$$

e

$$1{,}222\ldots = 1 + 0{,}222\ldots = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}.$$

Logo,

$$\frac{6{,}444\ldots}{1{,}222\ldots} = \frac{58/9}{11/9} = \frac{58}{11} = \frac{522}{99} = 5{,}272727\ldots$$

■

Fórmula geral para obter a fração geratriz

Apesar do título acima, lhe encorajamos a não decorar uma fórmula para o cálculo de frações geratrizes. Uma atitude muito melhor é, sempre que houver necessidade de calcular uma geratriz, aplicar o método discutido nos exemplos acima, que é prático, rápido e evita erros. Antes de prosseguir com a leitura, também lhe encorajamos a transformar outras dízimas em frações geratrizes e, ao fazê-lo, tentar descobrir por si só um *padrão* nos resultados. Uma dica: o numerador será uma "combinação" do anteperíodo com o período e o denominador será uma sequência de 9's e 0's. Se você conseguir descobrir sozinho um padrão válido para todas as transformações de dízimas e geratrizes, confira seu resultado com o restante dessa seção.

Lembre-se de que, é costumeira decompor uma dízima periódica como

$$32{,}675838383\ldots,$$

do seguinte modo:

$$32 + 0{,}675 + 0{,}000838383\ldots$$

em que temos a **parte inteira**, o número que corresponde à parcela à esquerda da vírgula (dada por 32, nesse exemplo); **anteperíodo**, a parcela à direita da vírgula que não se repete (dado por 675, nesse caso); e pelo **período**, a parcela à direita da vírgula que se repete periodicamente (dado por 83, no exemplo em tela). Podemos demonstrar, então, o seguinte mecanismo prático para determinar a fração geratriz representada por uma dízima periódica:

A fração geratriz de uma dízima periódica cuja *parte inteira é igual a zero* é da forma:

$$\frac{(\text{Anteperíodo com período}) - (\text{anteperíodo})}{9\ldots9\,0\ldots0},$$

onde a quantidade de 9's é igual à quantidade de algarismos do período e a quantidade de 0's é igual à quantidade de algarismos do anteperíodo.

Por exemplo, observe a dízima periódica 0,213424242 . . .. Seu anteperíodo é 213, que possui três algarismos, e seu período é 42, com dois algarismos. Logo, sua fração geratriz é:

$$\frac{21342 - 213}{99000} = \frac{21129}{99000}.$$

Por fim, caso a dízima periódica tenha uma parte inteira, basta somar essa parte inteira à fração geratriz da parte não inteira. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 7{,}3444\ldots &= 7 + 0{,}3444\ldots = \\ &= 7 + \frac{34-3}{90} = 7 + \frac{31}{90} \\ &= \frac{90 \cdot 7 + 31}{90} = \frac{661}{90}. \end{aligned}$$

Observação 1.21 Cuidado com dízimas periódicas negativas! Por exemplo,

$$-1{,}333\ldots = -1 - 0{,}333\ldots = -1 - \frac{3}{9} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}.$$

Um erro comum seria escrever $-1 + 0{,}333...$, que não é igual a $-1{,}333\ldots$. De fato, $-1 + 0{,}333\ldots = -0{,}666\ldots$.

1.3.2 – Expansões decimais e aproximações de números irracionais

Nas seções anteriores, vimos que números racionais (e, claro, as frações que os representam) têm, sempre, expansões decimais finitas ou infinitas e periódicas, essas últimas na forma de dízimas periódicas.

Reciprocamente, vimos vários exemplos do seguinte fato: expansão decimais finitas ou infinitas e periódicas são, sempre, representações de números racionais. Vimos, em particular, como determinar o número racional representado por uma dada dízima periódica, a chamada **fração geratriz** da dízima.

A questão, bem mais sutil, é se expansões decimais **infinitas** e **não-periódicas** também representam números reais. Já sabemos que os números reais representados por expansões decimais **infinitas** e **não-periódicas** devem ser, necessariamente, **números irracionais**.

Os números reais que tenham expansões decimais **infinitas** *e* **não-periódicas** *são números irracionais.*

Nesta seção, não estudaremos a questão mais profunda sobre quais condições fazem com que uma dada expansão decimal **infinita** e **não-periódica** *convirja* e represente um número real, não-racional. Em vez disso, temos o objetivo mais modesto, mas muito importante, de entender as expansões decimais (e as aproximações, portanto) de alguns números irracionais específicos.

Vejamos, em nosso primeiro exemplo, como obter os primeiros algarismos da expansão decimal (infinita e não-periódica) no número irracional $\sqrt{2}$. Sabemos que:

$$(1{,}4)^2 = 1{,}96 \quad \text{e} \quad (1{,}5)^2 = 2{,}25.$$

Logo,

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5.$$

Melhorando essa aproximação para mais casas decimais, observamos que:

$$(1{,}45)^2 = 2{,}1025 \qquad (1{,}425)^2 = 2{,}030625 \qquad (1{,}4125)^2 = 1{,}99515625$$

A cada passo deste processo, escolhemos em qual *intervalo* deve estar a melhor aproximação de $\sqrt{2}$. Temos, respectivamente, os seguintes intervalos *encaixados* um no outro:

$$1{,}40 < \sqrt{2} < 1{,}45,$$

em seguida,

$$1{,}400 < \sqrt{2} < 1{,}425$$

e, finalmente,

$$1{,}4125 < \sqrt{2} < 1{,}4250.$$

Essas aproximações podem ser representadas geometricamente nas seguintes cópias da reta numérica. A cada etapa, consideramos $\frac{1}{2}$ da unidade de medida usada na reta imediatamente anterior (lembre da ideia do "zoom" que usamos antes):

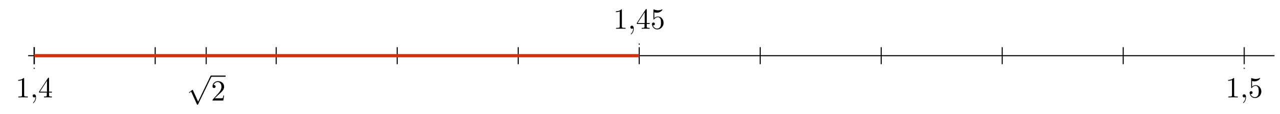


Figura 1.28: Aproximação de segmento de medida igual a $\sqrt{2}$ na escala de $0{,}1 = \frac{1}{10}$ da unidade de medida

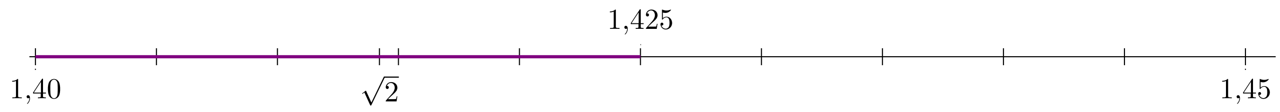


Figura 1.29: Aproximação de segmento de medida igual a $\sqrt{2}$ na escala de $0{,}01 = \frac{1}{100}$ da unidade de medida

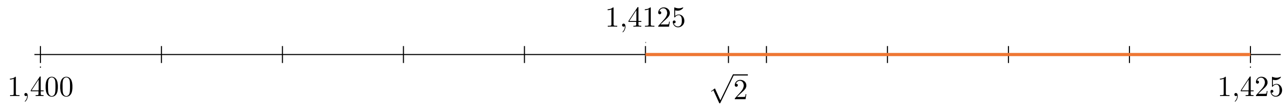


Figura 1.30: Aproximação de segmento de medida igual a $\sqrt{2}$ na escala de $0{,}001 = \frac{1}{1\,000}$ da unidade de medida

Analisando a terceira das retas numéricas, deduzimos uma aproximação ainda mais precisa de $\sqrt{2}$, com quatro casas decimais, a saber:

$$1{,}4125 < \sqrt{2} < 1{,}4150.$$

Para sermos mais precisos, como o ponto $\sqrt{2}$ está, na figura, à direita do ponto médio entre 1,4125 e 1,4150, teríamos

$$1{,}41375 < \sqrt{2} < 1{,}41500.$$

Estas aproximações, obtidas partindo cada intervalo ao meio e mantendo aquele em que está contido o número $\sqrt{2}$, poderiam prosseguir *indefinidamente*: jamais obteríamos uma expansão decimal *finita*, independentemente de quantas casas decimais considerássemos, que fosse *exatamente* igual a $\sqrt{2}$. O que obtemos, de fato, são aproximações **racionais** cada vez mais precisas de um número **irracional**.

Observação 1.22 O mesmo ocorre com qualquer número irracional: não é possível obter uma expansão decimal finita, ou mesmo infinita e periódica, de um número irracional. Não se trata de limitações nossas ou dos computadores, mas de uma **impossibilidade** matemática!

Se, por exemplo, você quiser conhecer uma aproximação do número π com 100 000 casas decimais, visite a página

http://www.geom.uiuc.edu/~huberty/math5337/groupe/digits.html

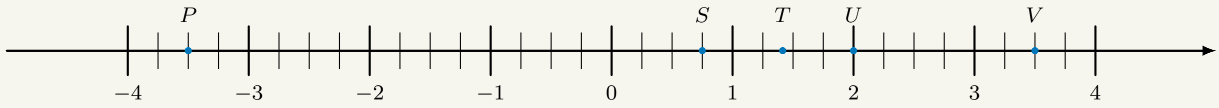
Nesta outra página, há muita informação interessante sobre π, incluindo o papel desse número em cálculos científicos em Astronomia e outras áreas:

https://www.youtube.com/watch?v=vY6965UdcLI

Exercício 1.13 Obtenha aproximações de $\sqrt{5}$ e da razão áurea $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ por números racionais.

Exercício 1.14 Observe a reta numérica da figura abaixo, a qual se encontra dividida em segmentos de mesmas medidas. Responda cada um dos itens a seguir:

(a) Qual ponto marcado na reta corresponde ao número real $3/4$?
(b) Qual ponto marcado na reta mais se aproxima do número $\sqrt{2}$?



Solução. (a) Veja que $3/4$ é uma fração que representa o número racional obtido dividindo-se o segmento unitário (do ponto 0 ao ponto 1 na reta numérica) em 4 pedaços e tomando-se 3 deles. Logo, está entre 0 e 1. O único ponto marcado na figura que está entre 0 e 1 é o ponto S. Assim, essa deve ser a resposta correta.

De todo modo, estudemos este problema em mais detalhes: temos marcados na escala os números inteiros de -4 a 4. Dessa forma, cada segmento entre dois números inteiros consecutivos tem comprimento 1. Veja que cada um desses segmentos de comprimento 1 foi dividido, na figura, em 4 pequenos segmentos de mesmo comprimento. Assim cada um deles possui comprimento $1/4$. Para chegar ao número $3/4$ devemos andar, a partir do número 0 e no sentido positivo, 3 vezes o segmento de comprimento $1/4$, parando sobre o ponto S.

(b) Veja que $1 < 2 < 4$, logo, $1 < \sqrt{2} < 2$. Assim, o ponto que melhor aproxima $\sqrt{2}$ deve estar entre os números 1 e 2 na reta numérica. O único ponto demarcado nesse intervalo na figura do enunciado é o ponto T. Veja que $\sqrt{2}$ é um número irracional, de modo que ele não possui uma representação decimal com uma quantidade finita de algarismos. Mas, podemos obter aproximações melhores do que a estimativa acima. Por exemplo, sabemos que $(1{,}4)^2 < 2 < (1{,}5)^2$, logo, $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$. Isso condiz com a posição do ponto T, que está um pouco à esquerda da marca correspondente ao valor 1,5. Observação: com o auxílio de uma calculadora, podemos checar que $\sqrt{2}$ vale aproximadamente 1,414. ■

1.4 – Exercícios resolvidos e propostos

Sequência 1

Exercício 1.15 Marque as alternativas que correspondem a números racionais:

(a) 1,5;
(b) 7;
(c) $\sqrt{5}$;
(d) $-0{,}222\ldots$;
(e) $80{,}1/129$;
(f) 1,4241;
(g) π.

Solução. Como vimos, os números $\sqrt{5}$ e π *não são* racionais. Por outro lado, todos os demais números listados aqui são racionais. Temos que $1{,}5 = \frac{3}{2}$, uma fração, logo, racional. Temos que 7 é inteiro, logo, é racional (podemos escrever $7 = \frac{7}{1}$). O número $-0{,}222\ldots$ é uma dízima periódica, portanto, também racional. O número $80{,}1/129$, apesar de não estar representado como uma fração de dois inteiros, pode ser reescrito como $\frac{80{,}1}{129} = \frac{801}{1290}$, de forma que também é racional. Por fim, o número 1,4241 é uma aproximação de $\sqrt{2}$ com 4 casas decimais. Apesar de $\sqrt{2}$ ser irracional, o número 1,4241 possui uma quantidade finita de casas decimais, logo, é racional; note que ele pode ser escrito como $1{,}4241 = \frac{14241}{10000}$. ■

Exercício 1.16 Marque cada afirmação como verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

(a) Todo número natural é inteiro?
(b) Todo número inteiro é natural?
(c) Todo número inteiro é racional?
(d) Todo número irracional é racional?
(e) Todo número inteiro é real?
(f) Todo número é real?

Solução. (a) Verdadeira. O conjunto dos números naturais é formado pelos números inteiros não negativos. Em particular, todos eles são inteiros.
(b) Falsa. O conjunto dos números inteiros inclui os números negativos, os quais não são naturais.
(c) Verdadeira. Números racionais são aqueles que podem ser representados por frações de inteiros. Para escrever um número inteiro na forma de fração, basta colocar o próprio número como numerador e 1 como denominador.
(d) Falsa. O conjunto dos números irracionais é composto por todos os números que não são racionais.
(e) Verdadeira. Todos os naturais, inteiros, racionais e irracionais são reais. De fato, o conjunto dos reais é composto pela união dos conjuntos dos racionais e dos irracionais.
(f) Falsa. Existem outros conjuntos numéricos (o conjunto dos números complexos, por exemplo), que contêm o conjunto dos números reais, mas também contêm números que são não-reais.

■

Exercício 1.17 — PUCCAMP 2000. Considere os conjuntos: $\mathbb{N}$ dos números naturais, $\mathbb{Q}$ dos números racionais, $\mathbb{Q}_+$ dos números racionais não negativos e $\mathbb{R}$ dos números reais. O número que expressa:

(a) a quantidade de habitantes de uma cidade é um elemento de $\mathbb{Q}_+$, mas não de $\mathbb{N}$.
(b) a medida da altura de uma pessoa é um elemento de $\mathbb{N}$.
(c) a velocidade média de um veículo é um elemento de $\mathbb{Q}$, mas não de $\mathbb{Q}_+$.
(d) o valor pago, em reais, por um sorvete é um elemento de $\mathbb{Q}_+$.
(e) a medida do lado de um triângulo é um elemento de $\mathbb{Q}$.

Exercício 1.18 — UTF-PR 2012. Indique qual dos conjuntos abaixo é constituído somente de números racionais.

(a) $\{-1, 2, \sqrt{2}, \pi\}$
(b) $\{-5, 0, \frac{1}{2}, \sqrt{9}\}$
(c) $\{-2, 0, \pi, \frac{2}{3}\}$
(d) $\{\sqrt{3}, \sqrt{64}, \pi, \sqrt{2}\}$
(e) $\{-1, 0, \sqrt{3}, \frac{1}{3}\}$

Sequência 2

Exercício 1.19 Calcule a representação fracionária de cada uma das seguintes dízimas periódicas, admitindo que os padrões sugeridos realmente se mantêm:

(a) 0,010101 . . .
(b) 0,123123123 . . .
(c) 0,999 . . .

Exercício 1.20 — Prova Brasil–2011. Em uma corrida de rua, os corredores tinham que percorrer 3 km, entre uma escola e uma Igreja. Joaquim já percorreu 2,7 km, João percorreu 1,9 km, Marcos percorreu 2,4 km e Mateus percorreu 1,5 km. Qual corredor está representado pela letra L, na Figura 1.31?

(a) Mateus. (b) Marcos. (c) João. (d) Joaquim.

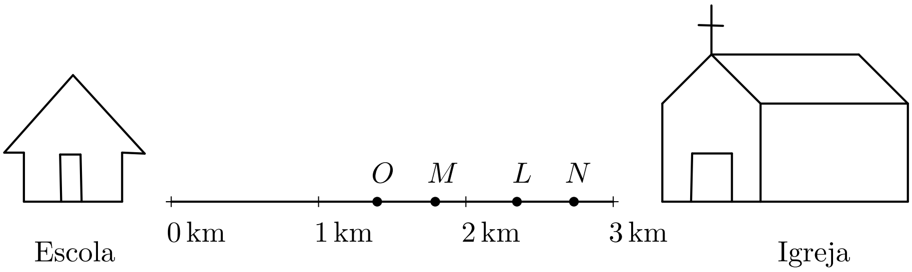


Figura 1.31: corredores ao longo do caminho entre a escola e a igreja.

Solução. Observando o número de quilômetros percorridos por cada corredor, veja que os únicos que percorreram entre dois e três quilômetros foram Marcos, com 2,4 km, e Joaquim, com 2,7 km. Logo, eles são representados, em alguma ordem, pelas letras L e N (que são os pontos marcados entre os números 2 e 3 na escala). Como $2{,}4 < 2{,}7$ e L está à esquerda de N, temos que a letra L representa o corredor que percorreu 2,4 km, ou seja, Marcos. Logo, a resposta correta é a alternativa (b). ■

Exercício 1.21 Calcule a representação decimal do número $22/7$. O resultado possui uma quantidade finita ou infinita de casas decimais? Caso seja uma dízima, indique seu período. Este número é conhecido como uma boa aproximação para π. Qual é a estimativa do erro que se comete caso esse número seja utilizado para aproximar π.

Solução. Como $22/7$ é um número racional, já sabemos que sua representação decimal ou terá uma quantidade finita de dígitos ou será uma dízima periódica. Ao efetuar a divisão, precisamos ter paciência (ou usar uma calculadora) para perceber que se trata de uma dízima, pois seu período tem 6 algarismos. A representação decimal obtida é $3{,}1428571428571\ldots$.

Ela é uma ótima aproximação de π, mas não é exata e nem poderia ser, já que π é um número irracional. Apenas as duas primeiras casas decimais são corretas, se compararmos com a expansão decimal de π:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937\ldots$$

Portanto, o erro que se comete ao aproximar π por tal número é menor que 0,01.

Observação 1.23 — Curiosidade. O número inteiro 142.857 (cujos algarismos são obtidos pelo período da representação decimal de $22/7$ e também de $1/7$) é muito famoso por ter uma propriedade bastante curiosa. Quando o multiplicamos por 2, 3, 4, 5 ou 6, obtemos sempre os mesmos algarismos apenas trocando sua ordem. Mas, quando o multiplicamos por 7, obtemos 999 999.

■

Exercício 1.22 Explique o porquê das afirmações a seguir serem *falsas*.

(a) A intersecção do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais tem 1 elemento.
(b) A divisão de dois números inteiros não-nulos é sempre um número inteiro.

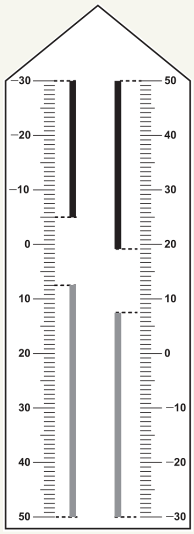
Sequência 3

Exercício 1.23 Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : -5 < x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 8\}$. Quais números reais estão na interseção dos conjuntos A e B, ou seja, pertencem aos dois conjuntos simultaneamente?

Exercício 1.24 — ENEM 2015. Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras mais próximas possíveis da medida 3,021 mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras: 3,10 mm; 3 mm; 2,96 mm; 2,099 mm e 3,07 mm. Se as lentes forem adquiridas nessa loja, a espessura escolhida será, em milímetros, de

(a) 2,099. (b) 2,96. (c) 3,021. (d) 3,07. (e) 3,10.

Exercício 1.25 — ENEM 2017. No modelo de termômetro da figura a seguir, os filetes na cor preta registram as temperaturas mínima e máxima do dia anterior e os filetes na cor cinza registram a temperatura ambiente atual, ou seja, no momento da leitura do termômetro.



Por isso ele tem duas colunas. Na da esquerda, os números estão em ordem crescente, de cima para baixo, de −30 °C até 50 °C. Na coluna da direita, os números estão ordenados de forma crescente, de baixo para cima, de −30 °C até 50 °C.

A leitura é feita da seguinte maneira:

- a temperatura mínima é indicada pelo nível inferior do filete preto na coluna da esquerda.
- a temperatura máxima é indicada pelo nível inferior do filete preto na coluna da direita.
- a temperatura atual é indicada pelo nível superior nos filetes cinzas nas duas colunas.

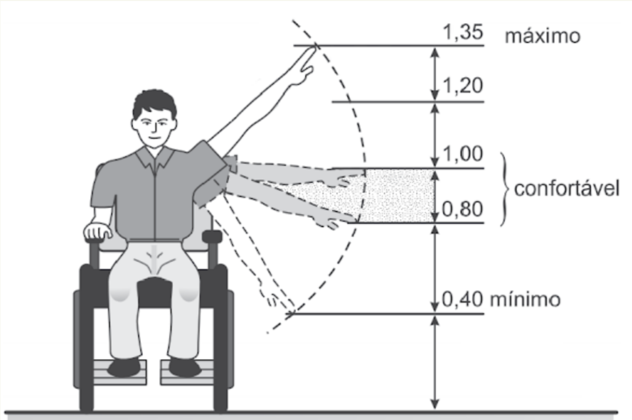
Qual é a temperatura máxima mais aproximada registrada nesse termômetro?

(a) 5 °C. (b) 7 °C. (c) 13 °C. (d) 15 °C. (e) 19 °C.

Exercício 1.26 — PUC. Para $a = 2{,}01$, $b = 4{,}2$ e $c = 7/3$, temos:

(a) $a < b < c$. (b) $b < c < a$. (c) $c < b < a$. (d) $c < a < b$. (e) $b < a < c$.

Exercício 1.27 — ENEM 2012. Num projeto da parte elétrica de um edifício residencial a ser construído, consta que as tomadas deverão ser colocadas a 0,20 m acima do piso, enquanto os interruptores de luz deverão ser colocados a 1,47 m acima do piso. Um cadeirante, potencial comprador de um apartamento desse edifício, ao ver tais medidas alerta o construtor para o fato de que elas não contemplarão suas necessidades. Os referenciais de alturas (em metros) para atividades que não exigem o uso de força são mostrados na figura seguinte.



Uma proposta substitutiva, relativa às alturas de tomadas e interruptores, respectivamente, que atenderá àquele potencial comprador é:

(a) 0,20 m e 1,45 m.
(b) 0,20 m e 1,40 m.
(c) 0,25 m e 1,35 m.
(d) 0,25 m e 1,30 m.
(e) 0,45 m e 1,20 m.

Sequência 4

Exercício 1.28 — UEPG 2010 – adaptado. Em cada alternativa, assinale V para verdadeiro ou F para falso:

( ) O número real representado por 0,5222... é um número racional.
( ) O quadrado de qualquer número irracional é um número racional.
( ) Se m e n são números irracionais, então mn pode ser racional.
( ) O número real $\sqrt{3}$ pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e $b \neq 0$.
( ) Toda raiz de uma equação algébrica de segundo grau é um número real.

Exercício 1.29 — PUC-RJ 2007. Os números m e n são tais que $4 \leq m \leq 8$ e $24 \leq n \leq 32$. O maior valor possível para m/n é:

(a) 1/2. (b) 1/3. (c) 1/6. (d) 1/5. (e) 1/8.

Exercício 1.30 É verdade que o produto de dois números irracionais é sempre um irracional? Justifique sua resposta.

Solução. Falso. O produto de dois números irracionais pode ser um irracional, mas também pode ser um racional. Por exemplo $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$ são números irracionais, mas seu produto $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ é um número natural, logo, um racional. ■

Exercício 1.31 — UFF 2010. Segundo o matemático Leopold Kronecker (1823-1891), “Deus fez os números inteiros, o resto é trabalho do homem.”

Os conjuntos numéricos são, como afirma o matemático, uma das grandes invenções humanas. Assim, em relação aos elementos desses conjuntos, é correto afirmar que:

(a) o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.
(b) a soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.
(c) entre os números reais 3 e 4 existe apenas um número irracional.
(d) entre dois números racionais distintos existe pelo menos um número racional.
(e) a diferença entre dois números inteiros negativos é sempre um número inteiro negativo.

Exercício 1.32 — ENEM 2ª aplicação 2010. Para dificultar o trabalho de falsificadores, foi lançada uma nova família de cédulas do real. Com tamanho variável – quanto maior o valor, maior a nota – o dinheiro novo terá vários elementos de segurança. A estreia será entre abril e maio, quando começam a circular as notas de R$ 50,00 e R$ 100,00. As cédulas atuais têm 14 cm de comprimento e 6,5 cm de largura. A maior cédula será a de R$ 100,00, com 1,6 cm a mais no comprimento e 0,5 cm cm maior na largura. Quais serão as dimensões da nova nota de R$ 100,00?

(a) 15,6 cm de comprimento e 6 cm de largura.
(b) 15,6 cm de comprimento e 6,5 cm de largura.
(c) 15,6 cm de comprimento e 7 cm de largura.
(d) 15,9 cm de comprimento e 6,5 cm de largura.
(e) 15,9 cm de comprimento e 7 cm de largura.

Exercício 1.33 — EsPCEx 2006. Se x é racional e y é irracional, então (qual das afirmativas é a única verdadeira para quaisquer x e y):

(a) $x \cdot y$ é racional.
(b) $y \cdot y$ é irracional.
(c) $x + y$ é racional.
(d) $x - y + \sqrt{2}$ é irracional.
(e) $x + 2y$ é irracional.

Exercício 1.34 Para que valores reais de x a expressão abaixo não é um número real?

$$\frac{4x+1}{2x^2-8}$$

Exercício 1.35 O número 0,112123123412345... possui um padrão em suas casas decimais. No primeiro passo escrevemos o número 1, no segundo escrevemos os números 1 e 2, no terceiro 1, 2 e 3, e assim sucessivamente, sempre acrescentando os algarismos de todos os primeiros inteiros positivos em sua representação decimal (OBS: no décimo primeiro passo, serão adicionados os algarismos 12...91011.) Apesar de existir um padrão que descreve os algarismos da parte decimal desse número, ele é irracional. Justifique essa afirmação, explicando o porquê desse número **não** ter um período, no sentido de dízimas.

2 Tarefas de revisão

2.1 – Tarefas relativas a números naturais e racionais

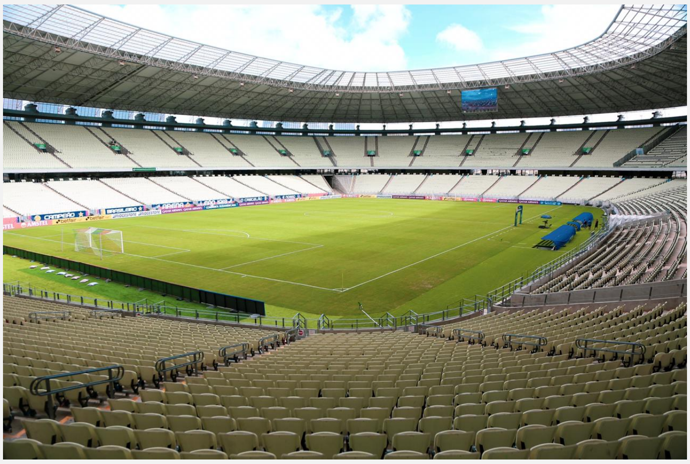


Figura 2.1: Fonte: Secretaria do Esporte e Juventude - Governo do Estado do Ceará

Segundo a Wikipedia, o Castelão tem capacidade para 63 903 pessoas. Veja em https://pt.wikipedia.org/wiki/Estádio_Governador_Plácido_Castelo

Exercício 2.1 A posição do algarismo 0 torna os seguintes números diferentes uns dos outros:

- 63 930
- 63 903
- 63 093
- 60 393

1) Explique por quê.
2) Escreva esses números em ordem crescente.
3) Qual o valor posicional do algarismo 9 em cada um desses números?

Exercício 2.2 O estádio do Maracanã tem capacidade para 78 838 pessoas. Esse número pode ser decomposto como

a) 7 milhares, 8 centenas e 38 unidades.
b) 7 milhares, 88 dezenas e 38 unidades.
c) 78 milhares, 83 dezenas e 8 unidades.
d) 78 milhares, 83 centenas e 8 unidades.

Exercício 2.3 O estádio do Morumbi tem capacidade para 67 052 pessoas. Esse número pode ser decomposto como

a) 6 dezenas de milhar, 75 dezenas e 2 unidades.
b) 6 dezenas de milhar, 705 dezenas e 2 unidades.
c) 67 dezenas de milhar, 5 dezenas e 2 unidades.
d) 67 milhares, 5 centenas e 2 unidades.

Exercício 2.4 O estádio Mané Garrincha, em Brasília, tem capacidade para 72 788 pessoas. Esse número pode ser decomposto como

a) $7\,000 + 2\,000 + 780 + 8$.
b) $70\,000 + 2\,000 + 78 + 8$.
c) $70\,000 + 2\,000 + 780 + 8$.
d) $7\,200 + 78 + 8$.

Identifique o erro nas alternativas incorretas.

Exercício 2.5 1) Arredonde o número 63 903 para as unidades de milhar mais próximas.
2) Arredonde o número 63 903 para as centenas mais próximas.

Exercício 2.6 Qual o sucessor de 63 099? E o antecessor de 64 000?

Exercício 2.7 O número 63 903 está mais próximo de 64 000 ou de 63 000?

Exercício 2.8 A tabela mostra a capacidade de quatro conhecidos estádios de futebol no Brasil:

Castelão	63 903
Morumbi	67 052
Mineirão	78 838
Mané Garrrincha	72 788

1) Qual desses estádios tem a maior capacidade?
2) Qual desses estádios tem a menor capacidade?
3) Quantos lugares ao todo, aproximadamente, têm esses quatro estádios?

Exercício 2.9 Em uma partida de futebol do clássico-rei Ceará×Fortaleza, foram ocupados $\frac{1}{3}$ do total dos 63 903 assentos do Castelão. Quantos assentos foram ocupados?

Exercício 2.10 Qual dos seguintes números é **maior**: $\frac{1}{3}$ do total dos 63 903 assentos do Castelão ou $\frac{1}{3}$ do total dos 67 052 desses assentos?

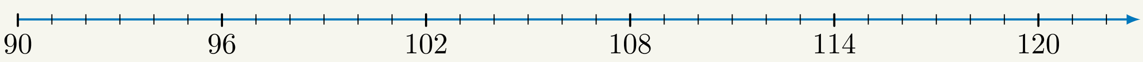
Exercício 2.11 Qual dos seguintes números é **maior**: $\frac{1}{4}$ de 63 903 ou $\frac{1}{3}$ de 63 903?

Exercício 2.12 Qual dos seguintes números é **maior**: $\dfrac{13}{4}$ ou $\dfrac{14}{3}$?

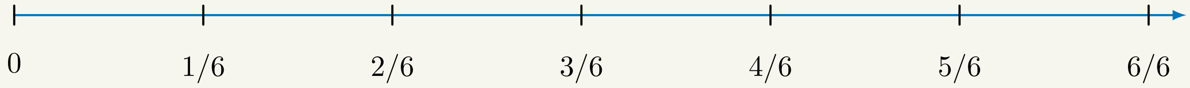
Exercício 2.13 Qual dos seguintes números é **maior**: $\dfrac{8}{3}$ ou $\dfrac{9}{4}$? Represente as duas frações na reta numérica.

Exercício 2.14 Represente as frações $\dfrac{8}{3}$ e $\dfrac{9}{4}$ como números decimais.

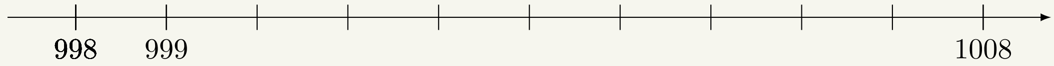
Exercício 2.15 Marque os números 93, 99 e 112 na reta numérica:

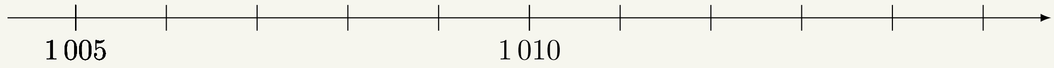


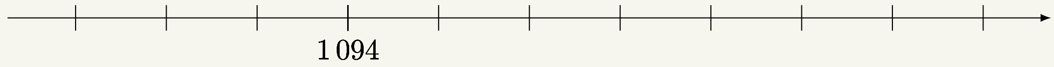
Exercício 2.16 Marque os números 1/4, 1/3, 1/2 e 2/3 na seguinte reta numérica:



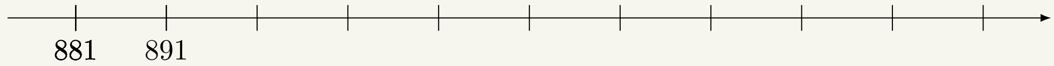
Exercício 2.17 A distância entre duas marcações consecutivas na reta numérica é de 1 unidade. Sendo assim, indique as marcações correspondentes aos números 1 001, 1 011 e 1 100, respectivamente, nas retas numéricas a seguir.

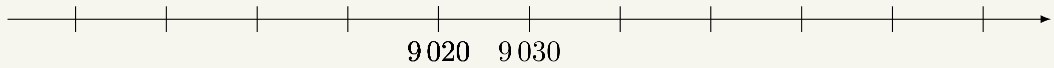


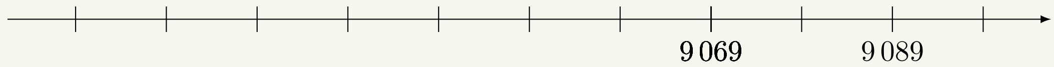




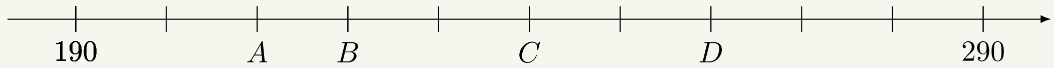
Exercício 2.18 Agora, suponha que a distância entre duas marcações consecutivas nas retas numéricas é de 10 unidades. Sendo assim, indique os números correspondentes a essas marcações:







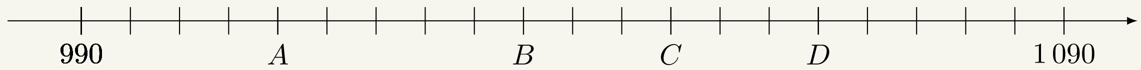
Exercício 2.19 Na reta numérica, as letras indicam a localização de alguns números.



A letra que indica a localização do número 240 nessa reta numérica é

a) A b) B c) C d) D

Exercício 2.20 Na reta numérica, as letras indicam a localização de alguns números.

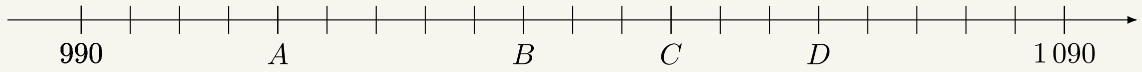


A letra que indica a localização do número 1 035 nessa reta numérica é

a) A b) B c) C d) D

As letras nas alternativas incorretas marcam que números?

Exercício 2.21 Na reta numérica, as letras indicam a localização de alguns números:



A letra que indica o ponto **mais próximo** da localização do número 1 048 nessa reta numérica é

a) A b) B c) C d) D

3 Referências

- Alguns portais e plataformas
  - Portal da Matemática: https://portaldaobmep.impa.br
  - Khan Academy: https://www.khanacademy.org/math/cc-fourth-grade-math
  - Roda de Matemática: https://www.rodadematematica.com.br/
  - OBMEP: http://www.obmep.org.br/provas.htm
  - Canguru: https://www.cangurudematematicabrasil.com.br
- Alguns canais e vídeos
  - Isto é Matemática: https://www.youtube.com/c/istoematematica
  - OBMEP: https://www.youtube.com/user/OBMEPOficial
  - Matemaníaca: https://www.youtube.com/channel/UCz4Zuqtj9fokXH68gZJmCdA
  - Números na BBC Brasil: https://www.youtube.com/watch?v=Kgt3UggJ70k
  - Marcus Du Sautoy, The Code, BBC.
- Referências para desenvolvimento profissional
  - Boaler, Jo. Mentalidades matemáticas. Porto Alegre, Penso, 2018.
  - Gauthier, Clermont et al. Ensino explícito e desempenho dos alunos: a gestão dos aprendizados. Petropólis, RJ: Vozes, 2014.
  - Dehaene, Stanislas. The number sense: how the mind creates mathematics - revised and updated edition. Oxford: Oxford University Press, 2011.
  - Oakley, Barbara et. al. A mind for numbers: how to excel at math and science. New York: TarcherPerigee, 2014.
  - Oakley, Barbara et al. Uncommon sense teaching. New York: TarcherPerigee, 2021.
- Referências sobre a temática do caderno
  - Bellos, Alex. Alex no pais dos números. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.
  - Dorichenko, S. Um círculo matemático de Moscou. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
  - Holanda, Bruno; Chagas, Emiliano. Círculos de Matemática da OBMEP, volume 1: primeiros passos em combinatória, aritmética e álgebra. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
  - Wu, Hung-Hsi. Compreender os Números na Matemática Escolar. Porto: Porto Editora & Sociedade Portuguesa de Matemática
  - Murcia, Joseángel. Y me llevo una. Zaragoza: Nordica Libros, 2019.
  - Stillwell, John. Elements of Mathematics. Princeton: Princeton University Press, 2016.
- Materiais interessante sobre incomensurabilidade/irracionalidade ou relacionado às cardinalidades de conjuntos infinitos:
  - Site das Matematicas Visuales: http://www.matematicasvisuales.com/english/html/geometry/goldenratio/pentagondiagonal.html
  - Notas de aula sobre expansões decimais: https://docs.ufpr.br/~akirilov/ensino/2017/docs/racionais_kirilov_linck.pdf
  - Sobre os fundamentos da Matemática, em Veritasium: https://www.youtube.com/watch?v=HeQX2HjkcNo
  - Sobre a secção áurea ou número de ouro, em Numberphile: https://www.youtube.com/watch?v=sj8Sg8qnjOg

CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

CIENTISTA CHEFE
EDUCAÇÃO

PACTO PELA
APRENDIZAGEM

MAISPAIC