CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

CADERNO DE ATIVIDADES

FORTALECENDO APRENDIZAGENS

MATEMÁTICA

4° E 5° ANOS

PROFESSOR

CIENTISTA CHEFE
EDUCAÇÃO
PACTO PELA APRENDIZAGEM
MAISPAIC

Volume 3

GOVERNADOR
Camilo Sobreira de Santana

VICE-GOVERNADORA
Maria Izolda Cela de Arruda Coelho

Secretária da Educação	Eliana Nunes Estrela
Secretário Executivo de Cooperação com os Municípios	Márcio Pereira de Brito
Assessora Especial de Gabinete	Ana Gardennya Linard
Coordenadora de Cooperação com os Municípios para Desenvolvimento da Aprendizagem na Idade Certa	Bruna Alves Leão
Articuladora da Coordenadoria de Cooperação com os Municípios para Desenvolvimento da Aprendizagem na Idade Certa	Marília Gaspar Alan e Silva
Equipe da Célula de Fortalecimento da Alfabetização e Ensino Fundamental - Anos Iniciais	Karine Figueredo Gomes (Orientadora) Caniggia Carneiro Pereira (Gerente - 4º e 5º) Rakell Leiry Cunha Brito (Gerente - 1º ao 3º)
Leitura Crítica	Tábita Viana Cavalcante Miranda
Revisão Gramatical	Cíntia Rodrigues Araújo Coelho
Equipe Programa Cientista Chefe em Educação Básica	Jorge Herbert Soares de Lira (Coordenador)
Elaboração e revisão de texto	Antonio Caminha M. Neto Bruno Holanda Emiliano Augusto Chagas Fabrício Siqueira Benevides Fernando Pimentel Jorge Herbert Soares de Lira Samuel Barbosa Feitosa Ulisses Parente

Sumário

1 Comprimentos e Perímetros

Podemos entender a *Geometria Plana* como a área da Matemática responsável pelo estudo das figura planas. De modo mais informal, na Geometria estudamos as propriedades de alguns desenhos especiais que podemos fazer em uma folha de papel.

A Geometria Euclidiana Plana baseia-se nos conceitos de *ponto*, *reta* e *plano*, os quais são o que chamamos de *noções primitivas* em Geometria. Por serem conceitos tão básicos, eles são alguns dos raros objetos matemáticos para os quais não é possível dar uma definição precisa. Devemos simplesmente aceitar que eles existem.

Por outro lado, não é difícil imaginar situações que podem ser modeladas através desses conceitos básicos. Considere, por exemplo, um técnico de futebol que deseja explicar suas estratégias a um grupo de jogadores. Ele pode utilizar uma folha de papel na qual está desenhado um retângulo com 22 pontos em seu interior, cada ponto representando um jogador. Nesse desenho, há também segmentos de retas representado as linhas do campo. Há, por fim, a própria folha de papel que, se considerada infinita, representa o plano.

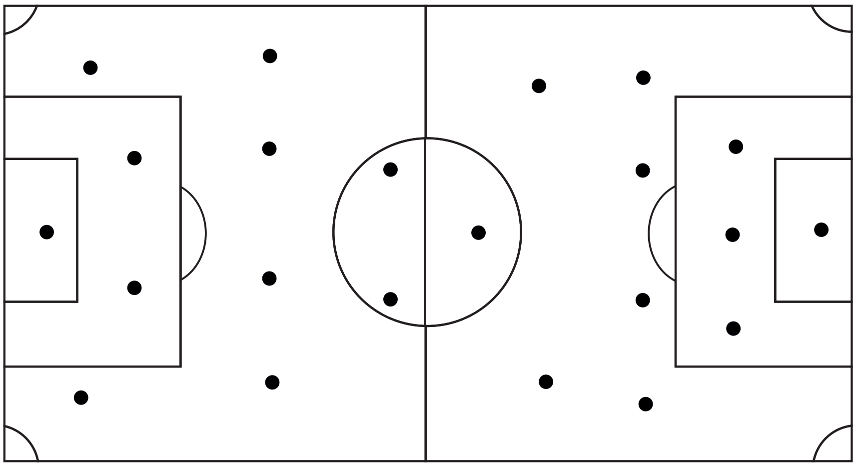


Figura 1.1: Ao fazermos um esboço de um campo de futebol, utilizamos diversas noções primitivas da Geometria.

Figuras Planas Básicas

Vamos agora explorar as figuras básicas da geometria. Desde já iremos deixar estabelecido que os pontos de um desenho serão denotados por letras maiúsculas: A, B, C,..., enquanto que as retas serão representadas por letras minúsculas: r, s, t,....

Um ponto O pertencente a uma reta r a divide em duas partes, chamadas *semirretas* de origem O. Se $A \in r$ e $A \neq O$, a semirreta de r que contém o ponto A é denotada por $\overrightarrow{OA}$.

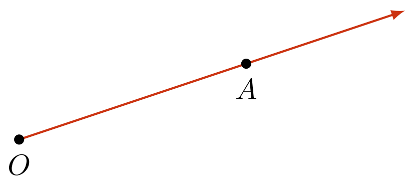


Figura 1.2: semirreta de origem O e passando por A.

Se A e B são dois pontos distintos pertencentes a uma reta r, os pontos que pertencem simultaneamente às semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ formam uma parte da reta chamada de *segmento de reta*. Nesse caso, dizemos que os pontos A e B são as extremidades desse segmento. Denotamos o segmento com extremidades A e B escrevendo AB.

Figura 1.3: Segmento de reta AB, em vermelho sólido, como interseção das semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$.

Uma vez que AB é a interseção das semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$, escrevemos $AB = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Também, dizemos que os pontos pertencentes ao segmento AB e distintos de A e de B *estão entre* A e B. Por fim, o comprimento do segmento AB é denotado por $\overline{AB}$.

Obs Por vezes, também escreveremos AB para denotar a reta determinada por dois pontos distintos A e B. A possibilidade de confusão com o *segmento* AB será mínima, pois o contexto sempre deixará claro se estaremos nos referindo à reta AB ou ao segmento AB.

Quando temos duas retas há duas possibilidades: elas podem se intersectar em um único ponto ou podem não ter um ponto em comum. Nesse segundo caso, dizemos que as retas são **paralelas**.

1.1.1 – Ângulos

Duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, com uma mesma origem O, dividem o plano em duas regiões, cada uma das quais é chamada de *ângulo*. As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os *lados* do ângulo.

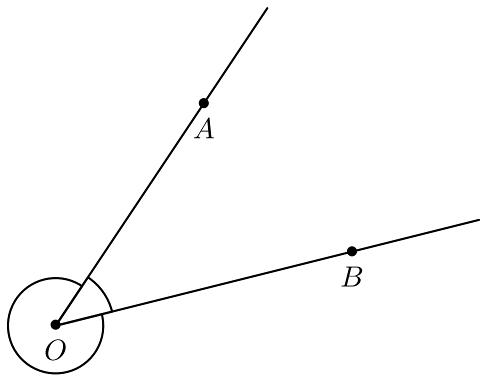
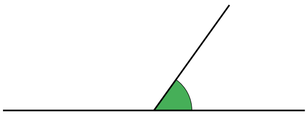


Figura 1.4: um ângulo.

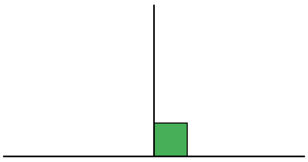
Para medir ângulos, devemos escolher um padrão, ou unidade. A unidade de medida de ângulos mais usada, e a mais antiga, é o *grau*.

Por convenção, dizemos que um ângulo $\angle AOB$ mede *um grau* — $1°$, em símbolos — quando o ângulo formado pela justaposição de 180 ângulos iguais a $\angle AOB$ resultar em um ângulo raso. Assim, um ângulo raso mede $180°$ e uma volta completa em torno de um ponto, correspondendo a dois ângulos rasos, mede $360°$.

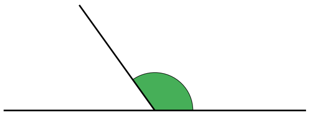
Um ângulo cuja medida é $90°$ é chamado *ângulo reto*, e corresponde à metade de um ângulo raso. Se a medida de um ângulo for menor que $90°$, diremos que esse ângulo é *agudo*. Se a medida de um ângulo for maior que $90°$ e menor que $180°$, diremos que esse ângulo é *obtuso* , conforme a seguinte figura.



(a) ângulo agudo.



(b) ângulo reto.



(c) ângulo obtuso.

Uma forma simples de visualizarmos e medirmos ângulos é através do uso de um *transferidor*, fazendo o centro do transferidor coincidir com o vértice do ângulo e a marcação zero coincidir com um dos lados do ângulo.

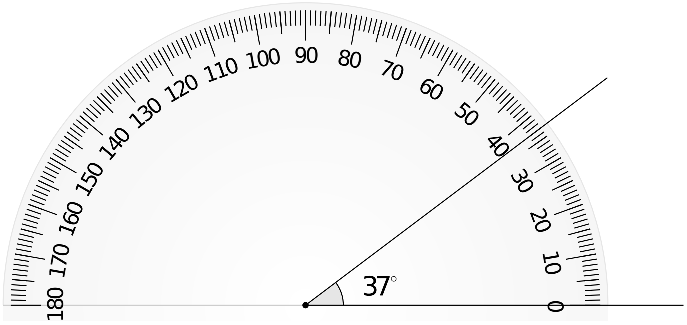


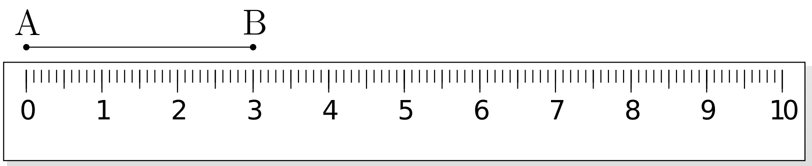
Figura 1.6: Um transferidor medindo um ângulo de $37°$. Muitos transferidores são transparentes, para poderem ser utilizados de ambos os lados.

Quando duas retas encontram-se formando um ângulo reto, dizemos que essas retas são **perpendiculares**.

Medidas de Comprimento

A **distância** entre os pontos A e B é, por definição, a **medida do comprimento** do segmento de reta AB. Frequentemente, o comprimento do segmento AB é representado por $\overline{AB}$. Porém, por vezes também utilizaremos a notação simplificada AB para representar essa medida. Isso não deve causar confusão, uma vez que o *contexto* sempre deixará claro se, ao escrevermos AB, estamos pensando no segmento de reta de extremidades A e B ou em seu comprimento.

O comprimento de um segmento AB pode ser calculado de diversas formas. A maneira mais comum é medir o segmento AB utilizando alguma ferramenta, como uma régua pautada, comparando-o com alguma unidade de comprimento pré-estabelecida, como o centímetro, o metro ou o quilômetro. Assim, a figura abaixo mostra um segmento AB de 3 centímetros de comprimento.



Começamos nosso roteiro com um probleminha simples, em que recordamos a importância das principais unidades de medida de comprimento.

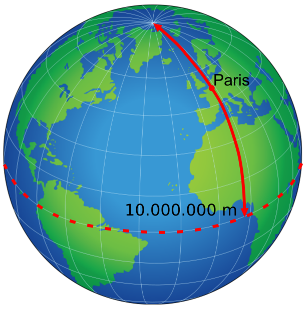
■ **Exemplo 1.1** Fábio está treinando para uma corrida. Ele dividiu seu treino em três etapas: na primeira correu 2 km, na segunda andou 800 metros e na terceira correu 3 km. Quantos metros ele percorreu ao todo, durante esse treino?

Antes de resolvermos esse exemplo, devemos lembrar que para somarmos comprimentos de caminhos ou objetos calculados em medidas diferentes, devemos, antes, transformar todos os comprimentos para uma mesma medida. No caso do problema em que estamos pensando, isso é fácil, uma vez que as medidas mencionadas no enunciado fazem parte do **sistema métrico**.

O sistema métrico é um sistema de medição internacional **decimalizado**, que surgiu pela primeira vez na França, durante a Revolução Francesa, visando minimizar a dificuldade de funcionamento do comércio e da indústria, devido à existência de diversos padrões de medida.

Esse sistema é ancorado em dois conceitos básicos: uma medida-base, o *metro*, e medidas múltiplas e submúltiplas do metro, as quais são obtidas multiplicando-se a medida-base por potências de dez.

Em 1793, foi definido (por convenção) que a medida-base (o metro) seria a décima milionésima parte da distância da linha do Equador ao polo Norte, ao longo do meridiano passando por Paris. Em outras palavras, a distância entre o polo Norte da Terra e a linha do Equador, ao longo do meridiano passando por Paris, seria de 10 milhões de metros. Veja a figura a seguir:



Obs A importância de especificar que a distância correspondia ao meridiano passando por Paris foi importante, tendo em vista que a Terra tem um formato *aproximadamente*, mas não *exatamente*, esférico. Assim, a distância da linha do Equador ao polo Norte, medida ao longo de outros meridianos, pode diferir ligeiramente daquela medida ao longo do meridiano que passa por Paris.

Existem situações nas quais o uso exclusivo da unidade-base deixa de ser prático. Isso ocorre quando queremos medir grandes extensões ou objetos muito pequenos.

Por tais razões, emprega-se os múltiplos e submúltiplos do metro, os quais também são chamados de *unidades secundárias* de comprimento. Elas são definidas de acordo com as tabelas a seguir:

Múltiplo	**Nome**	**Símbolo**
10^0	metro	m
10^1	decâmetro	dam
10^2	hectômetro	hm
10^3	quilômetro	km
10^6	megametro	Mm
10^9	gigametro	Gm
10^{12}	terametro	Tm
10^{15}	petametro	Pm
10^{18}	exametro	Em
10^{21}	zettametro	Zm
10^{24}	iotametro	Ym

Submúltiplo	**Nome**	**Símbolo**
10^0	metro	m
10^{-1}	decímetro	dm
10^{-2}	centímetro	cm
10^{-3}	milímetro	mm
10^{-6}	micrometro	μm
10^{-9}	nanômetro	nm
10^{-12}	picometro	pm
10^{-15}	femtômetro	fm
10^{-18}	attometro	am
10^{-21}	zeptômetro	zm
10^{-24}	yoctômetro	ym

Nas tabelas, os expoentes escritos nas potências de dez representam o número de vezes que o metro deve ser multiplicado por 10 para obtermos a referida medida. Por exemplo, o quilômetro está associado com 10^3. Isso significa que devemos pegar um metro e multiplicarmos por 10 três vezes consecutivas para obtermos 1 quilômetro. De forma análoga, um expoente negativo significa o número de vezes que 1 metro é divido por 10 para obtermos a medida referida. Por exemplo, o nanômetro está associado ao expoente -9 pois um metro precisa ser dividido por 9 vezes para obtermos 1 nanômetro.

Obs As medidas secundárias mais utilizadas são: milímetro, centímetro, decímetro e quilômetro.

Solução. Convertendo quilômetros para metros, temos que $2\,\text{km} = 2000\,\text{m}$ e $3\,\text{km} = 3000\,\text{m}$. Somando-se todas as medidas em metros, obtemos:

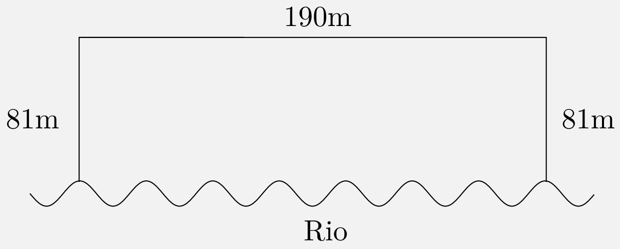
$$2000 + 800 + 3000 = 5800$$

metros. ∎

O vídeo a seguir traz uma interessante forma de comparação entre as escalas das unidades de medida do sistema métrico.

Saiba mais

Problema 1 — Enem–2013. Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.



A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 11. (E) 12.

Solução. Uma vez que um dos lados é margeado pelo rio, devemos desconsiderar esse lado ao calcular o perímetro do terreno, pois não utilizaremos tela alguma aí. Desse modo, a quantidade de tela utilizada para cercar todo o terreno é igual a $81 + 81 + 190 = 352$ metros. Por outro lado, a tela é vendida em rolos de 48 metros. Assim, para calcular a quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar o terreno, devemos começar dividindo 352 por 48:

$$\begin{array}{r|l} 352 & 48 \\ \hline 16 & 7 \end{array}$$

Veja que 7 rolos de tela não são suficientes para cercar o terreno, pois ainda ficariam 16 metros sem cerca. Assim, a quantidade mínima de rolos para cercar o terreno é $7 + 1 = 8$, embora o oitavo rolo não seja utilizado completamente. ∎

Você pode utilizar a sequência de aulas da Khan Academy para aprender e praticar um pouco mais sobre conversões entre diferentes unidades do sistema métrico.

Saiba mais

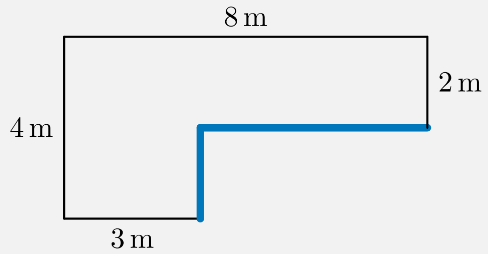
Perímetros de Figuras

1.3.1 – Polígonos

Quando temos três pontos A, B e C que não estão sobre uma mesma reta e ligamos-os através dos segmentos AB, BC e CA formamos uma figura conhecida como **triângulo**.

Quando temos quatro pontos A, B, C e D em que não há três deles que estão sobre uma mesma reta, e ligamos-os através dos segmentos AB, BC, CD e DA formamos uma figura conhecida como **quadrilátero**.

Problema 2 Na figura a seguir, temos um polígono em forma de "L", tal que todos os pares de lados consecutivos formam ângulos a 90° ou 270°. Joaquim deseja criar uma cerca contornando todo o perímetro desse terreno. Qual será o tamanho dessa cerca?



Antes de resolvermos o problema, note que não conhecemos, a princípio, as medidas de alguns trechos da cerca, destacados com segmentos "mais grossos". Para encontrar o perímetro dessa figura, devemos primeiro descobrir essas medidas.

Solução. Antes de tudo, vamos denotar os vértices do terreno com as letras A, C, D, F, G e H. Agora, para esse terreno é dito no enunciado que todos os ângulos internos entre lados consecutivos medem 90° ou 270°. Como um quadrilátero com todos os seus ângulos internos retos é um retângulo, não é difícil perceber que podemos dividir esse primeiro terreno em dois retângulos, conforme mostrado na Figura 1.7 (veja o segmento de reta tracejado BF):

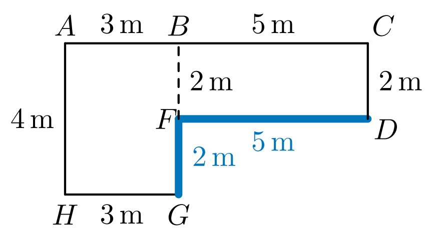


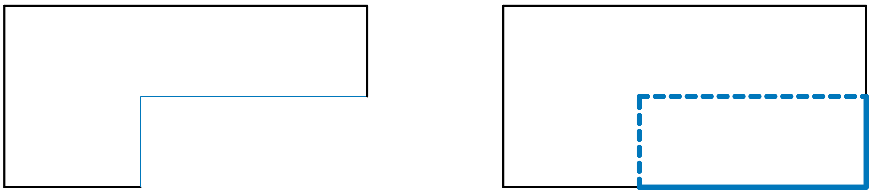
Figura 1.7: cálculo dos comprimentos dos lados remanescentes do "L".

Como os lados opostos de um retângulo têm as mesmas medidas, o segmento BF tem a mesma medida do segmento CD, ou seja, $\overline{BF} = 2\,\text{m}$. Da mesma forma, o segmento BG tem medida igual à do segmento AH, de forma que $\overline{BG} = 4\,\text{m}$ e, assim, $\overline{FG} = \overline{BG} - \overline{BF} = 4\,\text{m} - 2\,\text{m} = 2\,\text{m}$. Agora, observe que o lado horizontal maior AC, que mede 8 m, ficou dividido em dois segmentos, AB e BC. Novamente pelo fato de $ABGH$ ser um retângulo, temos $\overline{AB} = 3\,\text{m}$. Então, $\overline{DF} = \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = 8\,\text{m} - 3\,\text{m} = 5\,\text{m}$. Portanto, o perímetro do terreno em forma de "L" é

$$4 + 8 + 2 + 5 + 2 + 3 = 24 \text{ metros.}$$

■

Outro modo de explorar a geometria da figura, para calcular o perímetro do terreno em forma de "L", consiste em *explorar uma simetria escondida*, mais precisamente, perceber que esse perímetro é igual àquele do retângulo esboçado na figura abaixo, à direita:

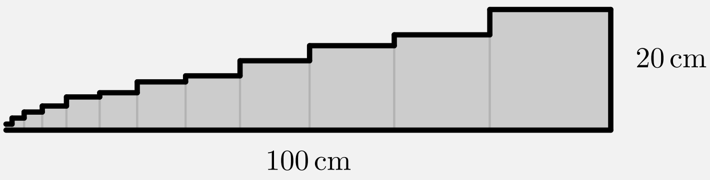


Isto porque, nela, o quadrilátero de bordas destacadas é um retângulo, o que é também consequência da condição sobre os ângulos internos formados por lados consecutivos do polígono "L". Logo, a soma das medidas de dois lados consecutivos do mesmo é igual à soma das medidas dos outros dois lados. Desse modo, o perímetro pedido é igual a

$$2 \cdot (\overline{AH} + \overline{AC}) = 2 \cdot (4 + 8) = 2 \cdot 12 = 24 \text{ metros.}$$

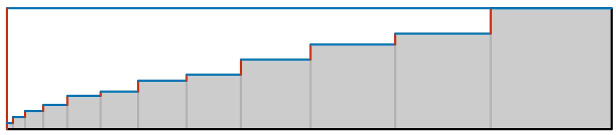
Utilizaremos mais uma vez essa estratégia no problema a seguir.

Problema 3 — OBMEP. Vários quadrados foram dispostos um ao lado do outro, em ordem crescente de tamanho, formando uma figura com 100 cm de base. O lado do maior quadrado mede 20 cm. Qual é o perímetro (medida do contorno em destaque) da figura formada por esses quadrados?



(a) 220 cm.
(b) 240 cm.
(c) 260 cm.
(d) 300 cm.
(e) 400 cm.

Solução. Inicialmente, completamos um retângulo cujos lados medem 100 cm e 20 cm, conforme mostrado a seguir:



Na figura, a soma das medidas dos segmentos verticais, que fazem parte do contorno da figura descrita no enunciado, é igual à medida do lado vertical do retângulo construído. Do mesmo modo, a soma das medidas dos segmentos horizontais, que estão da figura original, é igual à medida do lado horizontal do retângulo construído. Assim, o seu perímetro que se quer calcular é igual a

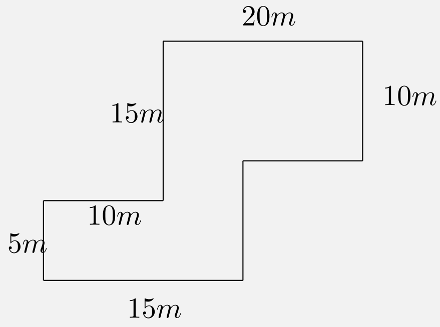
$$2 \cdot (100 + 20) = 2 \cdot 120 = 240 \text{ cm.}$$

A alternativa correta é a letra **(b)**. ■

Nota ao(à) professor(a) 1.1 É importante comparar os dois problemas anteriores e verificar se a estratégia utilizada na primeira solução do Problema 2 ainda pode ser empregada para resolvermos o Problema 3. Assim, o professor pode deixar uma importante mensagem para seus alunos: que é importante aprender diferentes estratégias de soluções de problemas pois, a depender da situação apresentada no enunciado, uma estratégia pode ser viável enquanto que outra não. Isso também deixa evidente que não devemos desistir da busca por uma solução quando uma primeira tentativa não é frutífera.

Duas figuras planas estão concatenadas quando compartilham um lado (ou parte de lado) comum. Uma propriedade intuitiva sobre áreas afirma que, ao concatenarmos duas figuras planas, a figura resultante possui área cuja medida é igual à soma das medidas das áreas das figuras originais. Essa propriedade torna-se especialmente útil quando a aplicamos do sentido reverso. Mais especificamente, quando estamos em uma situação na qual devemos calcular a área de uma figura complexa, podemos particioná-la em figuras menores e mais simples, cujas áreas sabemos calcular. Um exemplo dessa estratégia é encontrado na solução do problema a seguir:

Problema 4 Calcule a área do polígono a seguir, em que todos os pares de lados consecutivos formam ângulos a 90° ou 270°.



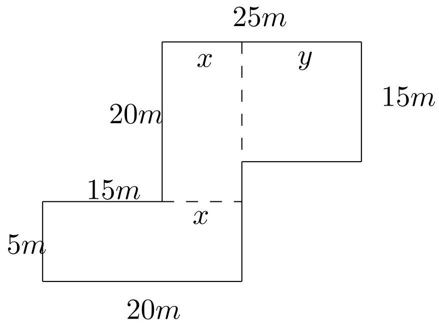


Figura 1.8: Decompondo uma figura complexa em outras mais simples.

Solução. Em primeiro lugar, iremos decompor a figura do enunciado em três retângulos, utilizando segmentos tracejados paralelos aos lados do polígono original, conforme a Figura 1.8. Utilizando o fato de um retângulo ter pares de lados paralelos, podemos encontrar as medidas dos segmentos x e y. De fato, $x = 20 - 15 = 5$ e $y = 25 - x = 20$. Assim, a área A da figura é a soma das áreas dos três retângulos, ou seja,

$$\begin{aligned} A &= (5 \cdot 20 + 5 \cdot 20 + 15 \cdot 20)\ m^2 \\ &= 20 \cdot (5 + 5 + 15)\ m^2 = 20 \cdot 25\ m^2 = 500\ m^2. \end{aligned}$$

■

Obs O problema anterior também pode ser resolvido "completando" o retângulo, com lados paralelos aos do polígono, no qual o polígono está inscrito. Em seguida, calcula-se a área desse retângulo e subtrai-se as áreas dos dois retângulos que foram acrescentados ao polígono. Veja a Figura 1.9.

Nota ao(à) professor(a) 1.2 Recomendamos que o professor permita que os alunos pensem por alguns minutos no Problema 4 antes de apresentar as soluções. O objetivo é que a turma perceba que um mesmo problema pode ser resolvido empregando diferentes estratégias. Essa percepção está associada com a habilidade com a habilidade **(EM13MAT307)** da BNCC que é descrita como *"Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias*

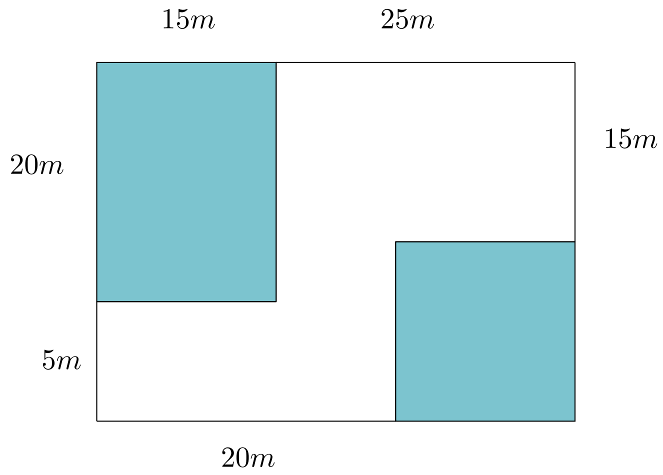


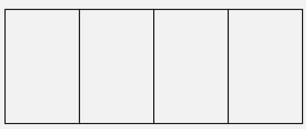
Figura 1.9: Completando um retângulo e subtraindo a área do que foi acrescentado.

digitais."

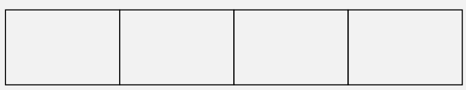
Ainda sobre essa habilidade, o professor pode solicitar que seus alunos construam a figura apresentada no Problema 4 no GeoGebra e utilizem a ferramenta para determinação da área de um polígono para verificarem a resposta. Um projeto análogo pode ser feito com o Problema 2.

Cabe lembrar que o perímetro de uma figura, que é obtida através da concatenação de outras, **não é igual** à soma dos perímetros das figuras originais. Isso ocorre pelo fato dos lados compartilhados deixarem, obrigatoriamente, de ser contabilizados no cálculo do perímetro da figura resultante. Veja o problema a seguir em que um mesmo conjunto de retângulos pode ser organizado para formar duas figuras com perímetros diferentes.

Problema 5 Oito retângulos idênticos foram utilizados para formar as duas seguintes figuras retangulares. O perímetro da primeira é 42 cm e o da segunda é 48 cm. Qual é o perímetro de cada um dos quatro retângulos idênticos?



Perímetro 42 cm



Perímetro 48 cm

Solução. Veja que ao somarmos os perímetros das duas figuras, cada um dos quatro lados do retângulo original é somado 10 vezes. Assim, para calcularmos o perímetro deste retângulo basta dividir o resultado de $48 + 42 = 90$ por 5, obtendo-se 18 cm. ■

Nota ao(à) professor(a) 1.3 O Problema 5 pode ser trabalhado utilizando-se modelos físicos dos retângulos construídos a partir de uma folha de papel. Incentive seus alunos a criarem suas próprias versões de problemas semelhantes a esse.

Polígonos, cujos lados e vértices estão sobre as grades de um reticulado, podem ter seus perímetros e áreas calculados facilmente através de contagem manual. Veja o próximo problema.

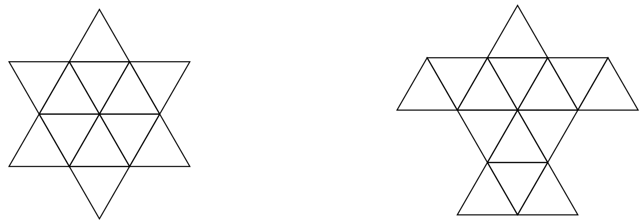
2 Medidas de Áreas

Área é um conceito geométrico intuitivo no qual lidamos em várias situações corriqueiras. Em um polígono, podemos definir sua área como a região interna delimitada por seus lados.

Medindo Áreas por Comparação

Para **medir** a área de um polígono devemos sempre comparar sua região interna com a região interna de uma outra figura que servirá como medida unitária.

■ **Exemplo 2.1** Considere as seguinte figuras formadas por triângulos equiláteros



Observe que a figura da esquerda é formada por 12 triângulos idênticos, portanto sua área é 12 vezes maior do que a área de um desses triângulos. De modo análogo, a figura da direita é formada por 14 triângulos, logo sua área é 14 vezes maior do que a área de um desses triângulos. Além disso, podemos afirmar que a figura da direita tem uma área **maior** do que a figura da esquerda.

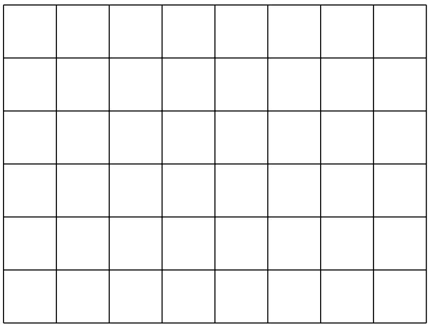
De certo modo, medir uma área é sempre uma forma de comparação entre área. Por questões históricas e práticas, adota-se um padrão de comparação baseado em quadrados de lados 1 em alguma medida de comprimento.

■ **Exemplo 2.2** Podemos construir figuras utilizando vários quadrados com lado 1 cm.

A figura da esquerda é formada por 8 quadrados de lado 1 centímetro. Portanto, dizemos que essa figura tem área de 8 **centímetros quadrados**. Ou ainda de forma resumida, $8\,\text{cm}^2$. De forma análoga, a figura da direita tem $12\,\text{cm}^2$.

Problema 6 Qual é a área (em centímetros quadrados) de um retângulo que possui lados de medidas 6 cm e 8 cm?

Solução. Note que ao perguntar a medida da área de um figura em centímetros quadrados, estamos interessados em saber quantos quadrados de lado 1 cm são necessários para compor essa figura. No caso desse retângulo descrito no enunciado, iremos dividí-lo utilizando retas paralelas aos seus lados de modo que a distância entre duas retas paralelas vizinhas seja 1 cm. Obtemos a seguinte figura



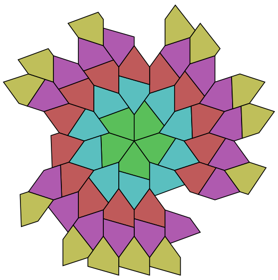
Observe que para contar quantos quadradinhos são utilizados para compor o retângulo, basta efetuar a multiplicação $8 \times 6 = 48$. Portanto, o retângulo tem área $48\,\text{cm}^2$. ■

No que o argumento que foi utilizado para resolver o problema anterior pode ser facilmente adaptado para qualquer retângulo com lados inteiros. Assim, se um retângulo possui lados com medidas a e b, calculadas em relação à mesma medida unitária, então sua área será igual a $a \times b$.

Um caso particular interessante é quando temos um quadrado de lado $1\,\text{m}$. Sabemos que um metro é equivalente a 100 centímetros. Dessa forma, podemos dividir um quadrado de lado um metro em $100 \times 100 = 10.000$ quadrados de lado um centímetro. Em termos de medida de área, temos que

$$1\,\text{m}^2 = 10.000\,\text{cm}^2.$$

■ **Exemplo 2.3** A figura a seguir é formada por vários polígonos idênticos de cinco lados cada. Se cada um desses polígonos tem área 3 centímetros quadrados, qual é a área da figura maior?

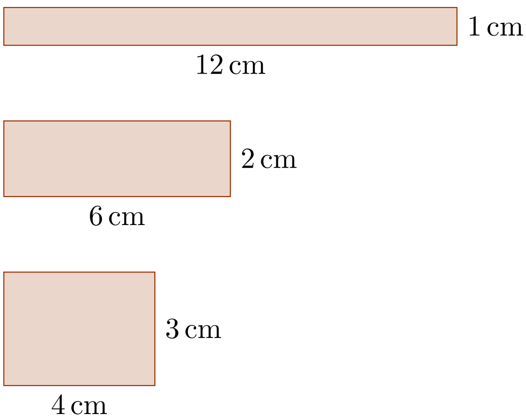


Solução. Os polígonos de cinco lados são conhecidos como pentágonos. Vamos contar o número desses polígonos na figura: São 5 verdes, 10 azuis, 14 vermelhos, 16 roxos e 13 da cor oliva. Ou seja, são $5 + 10 + 14 + 16 + 13 = 58$ pentágonos. Logo, a área total é $3 \times 58 = 174$. ■

Problema 7 — Canguru. A área de um retângulo é $12\,\text{cm}^2$ e as medidas dos seus lados são números naturais. Qual das medidas a seguir pode ser o perímetro desse retângulo?

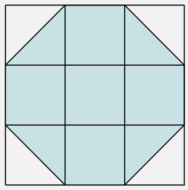
(a) 20 cm. (b) 26 cm. (c) 28 cm. (d) 32 cm. (e) 48 cm.

Solução. Se as medidas dos lados do retângulo são números naturais e sua área é $12\,\text{cm}^2$, então as medidas dos seus lados podem ser 12 cm e 1 cm; 4 cm e 3 cm ou 6 cm e 12 cm.



Uma vez que os perímetros dos retângulos acima são $2\times(12+1) = 2\times 13 = 26\,\text{cm}$, $2\times(6+2) = 2\times 8 = 16\,\text{cm}$ e $2\times(4+3) = 2\times 7 = 14\,\text{cm}$, o único valor possível para o perímetro do retângulo dentre as alternativas é $26\,\text{cm}$. Portanto, a alternativa correta é a letra **(b)**. ■

Problema 8 Um polígono cinza que possui oito lados foi desenhado sobre uma grade formada por quadradinhos de área 1, conforme ilustrado a seguir.



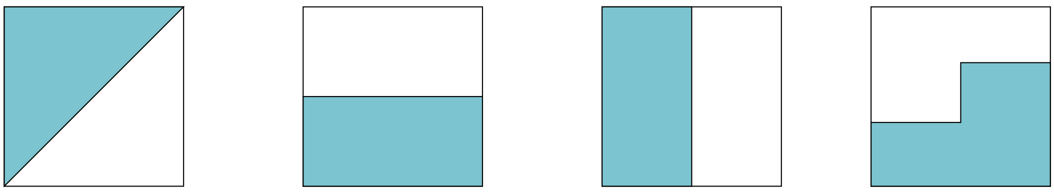
Qual é a área do polígono cinza?

Solução. O polígono é formado por 5 quadrados e quatro triângulos. Dois desses triângulos podem ser reagrupados para formar um quadrado. Se temos quatro triângulos, eles podem ser rearrumados para formar dois quadrados. Logo, a área do polígono é equivalente a área de $5+2=7$ quadrados. ■

Utilizaremos o problema anterior para motivar o estudo das áreas de figuras que representam frações da área de um quadrado de lado 1.

2.1.1 – Áreas Fracionárias

Ao traçarmos a diagonal de um quadrado, dividimos essa figura em duas partes de mesma área. Se o quadrado tiver área 1, cada parte terá área metade de 1. Matematicamente, há uma notação que representa essa quantidade de área que é $\dfrac{1}{2}$ (leia um meio). Na figura a seguir, podemos encontrar várias formas de se dividir um quadrado de área 1 em duas partes iguais. Assim, cada região cinza dessa figura tem área $\dfrac{1}{2}$.



Observe que $\frac{1}{2}$ representa uma quantidade de área que é menor do 1, mas maior do que 0. Assim, trata-se de um número que não é inteiro. De fato, $\frac{1}{2}$ está em um conjunto de números conhecidos como **racionais** que podem ser representados como uma fração de dois inteiros.

Lembre-se que podemos definir sobre o conjunto dos inteiros, operações básicas como adição, multiplicação, subtração e divisão. Essas operações também podem ser definidas para o conjunto das frações.

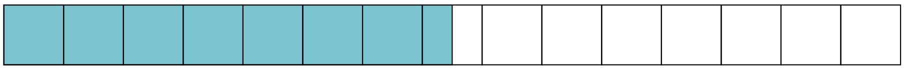
O objetivo desse material não é o de nos aprofundarmos no tópico sobre números fracionários. Por outro lado, podemos usar a noção intuitiva de área para entendermos um pouco mais sobre esses números. Em particular, podemos esperar que a seguinte igualdade seja verdadeira

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Em palavras, se dividirmos um quadrado de área 1 em duas partes iguais, ao recombinarmos essas partes, voltaremos a ter uma figura de área 1. Ou ainda de maneira mais informal, “duas metades resulta em um todo”.

Agora aprenderemos o significado de números do tipo $\frac{n}{2}$, em que n é um número natural. Por exemplo, para $n=15$, estamos lidando com a fração $\frac{15}{2}$ que representa metade de uma figura de área 15.

Assim, imagine que há um retângulo formado por 15 quadrados unitários enfileirados. Ao dividirmos esse retângulo com um corte vertical, em duas partes de mesma área, obtemos a seguinte figura:



Veja que ao destacarmos metade da área do retângulo, obtemos sete quadrados e meio pintados. Matematicamente, temos a seguinte igualdade

$$\frac{15}{2} = 7 + \frac{1}{2}.$$

De maneira geral, se n é um número par, então $n = 2k$ para algum k inteiro. Assim,

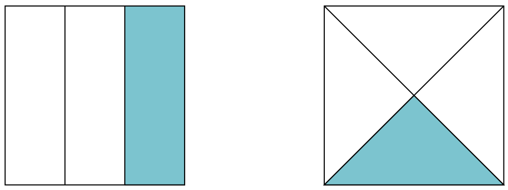
$$\frac{n}{2} = 2k \div 2 = k.$$

Se n é um número ímpar, então $n = 2k + 1$ para algum inteiro k. Assim,

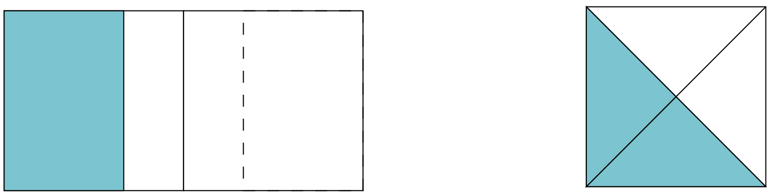
$$\frac{n}{2} = (2k \div 2) + \frac{1}{2} = k + \frac{1}{2}.$$

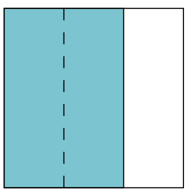
Para finalizar essa seção, observe que um quadrado também pode ser dividido em três, quatro, cinco ou mais partes iguais. Para cada tipo de divisão utilizaremos um tipo específico de fração para denotá-la.

Por exemplo, ao dividirmos um quadrado de área 1 em três partes iguais, cada parte terá área $\frac{1}{3}$. Da mesma forma, se forem quatro partes iguais, cada uma terá área $\frac{1}{4}$ e assim sucessivamente.



A partir da recombinação de áreas, podemos verificar algumas igualdades que envolvem frações. Por exemplo, considere as figuras a seguir.





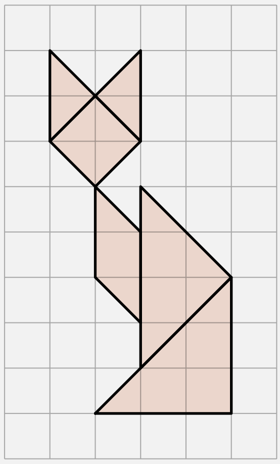
Comparando as duas figuras da esquerda, vemos um retângulo formado por dois quadrados de área 1 que está dividido em três partes iguais. Uma dessas partes é selecionada, e tem área igual a $\frac{2}{3}$. Podemos verificar que essa área é equivalente a duas áreas de medida $\frac{1}{3}$ que são obtidas quando dividimos um único quadrado de área 1 em três partes iguais. Matematicamente,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Além disso, na figura da direita, vemos um quadrado de área 1 dividido em quatro partes iguais. Duas dessas partes estão destacadas e juntas correspondem a metade da área do quadrado. Logo,

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Problema 9 Qual é a área colorida na figura abaixo em cm^2, se o lado de cada quadradinho mede $2\,\text{cm}$?



(a) 56. (b) 58. (c) 60. (d) 62. (e) 64.

Solução. Inicialmente vamos contar a quantidade de quadradinhos da malha inteiramente contidos na região colorida. Fazendo essa contagem, chegamos a um total de 6 quadradinhos. Agora, contando a quantidade de triângulos – cujas áreas são iguais à metade da área de um quadradinho da malha – contidos na região colorida, chegamos a um total de 17. Como a área de cada triângulo é igual à metade da área de um quadradinho, a soma das áreas desses 17 triângulos corresponde à soma das áreas de $17\times\frac{1}{2} = 8 + \frac{1}{2}$ quadradinhos. Portanto, a área procurada é igual à área de $6 + 8 + \frac{1}{2} = 14 + \frac{1}{2}$ quadradinhos. Mas note que a área de cada quadradinho é $2^2 = 4\,\text{cm}^2$, pois o lado de cada quadradinho mede $2\,\text{cm}$. Logo, a área colorida é igual a $\left(14 + \frac{1}{2}\right)\times 4 = 56 + 2 = 58\,\text{cm}^2$. ■

Recorte e Recombinação de Áreas

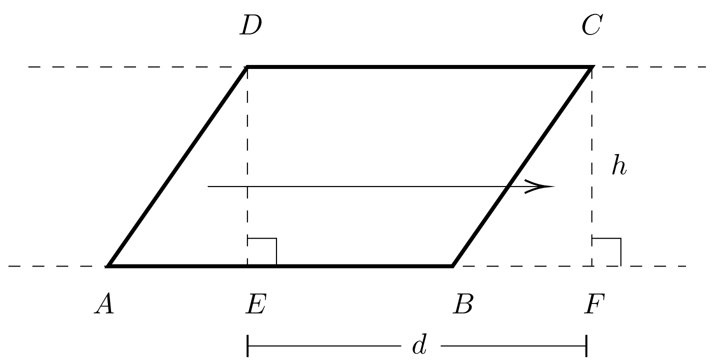
Além das figuras que podem ser particionadas em retângulos, também podemos encontrar as áreas de figuras simples através de estratégias do tipo “recorte e remonte”. Essas figuras são os paralelogramos, os triângulos e os trapézios.

Definição 2.2.1 Um **paralelogramo** é um quadrilátero que possui dois pares de lados opostos paralelos.

Paralelogramos possuem diversas propriedades que podem ser demonstradas com o uso do conceito de *congruência de triângulos*. Como essa ferramenta só será formalmente desenvolvida no próximo módulo de Geometria, utilizaremos essas propriedades de forma intuitiva.

Considere um paralelogramo $ABCD$, ilustrado na figura a seguir. Obteremos, com auxílio desta figura, a fórmula para a área do paralelogramo. Para isso, sejam F e E as *projeções ortogonais* dos pontos C e D, respectivamente, sobre a reta que contém o lado AB — reta suporte de AB.

Obs Nas notações da figura abaixo, dizer que E é a **projeção ortogonal** de D sobre a reta AB, significa dizer que E pertence à reta suporte de AB, e que esta reta é perpendicular à reta suporte de DE, isto é, formam um ângulo de $90°$ uma com a outra.



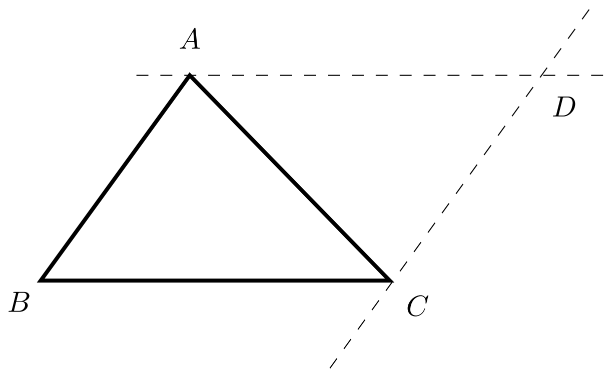
Como CD e AB são paralelos, temos $CF = DE$. A medida comum dos segmentos CF e DE será denotada por h, sendo conhecida como a **altura** do paralelogramo $ABCD$, relativa ao lado AB. Nesse caso, AB é chamado de **base** relativa à altura h.

Observe que $DEFC$ é um retângulo, logo, sua área é igual ao produto de suas dimensões. Como $AB = CD = d$, concluímos que a medida da área de $DEFC$ é igual a $d \times h$.

Por outro lado, os triângulos ADE e BCF são *congruentes*, isto é, são "essencialmente iguais", dizendo isso que podemos deslocar um deles no plano até superpô-lo ao outro, sem que haja "sobras ou faltas". Assim, podemos "transportar" a área de ADE para a área de BCF, de forma que a medida da área do paralelogramo $ABCD$ é igual à medida da área do retângulo $DEFC$. Portanto, a área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.

Obs De agora em diante, utilizaremos colchetes para denotar a área de figuras planas. Por exemplo, $[XYZ]$ denota a área do triângulo XYZ e $[PQRS]$ denota a área do quadrilátero $PQRS$.

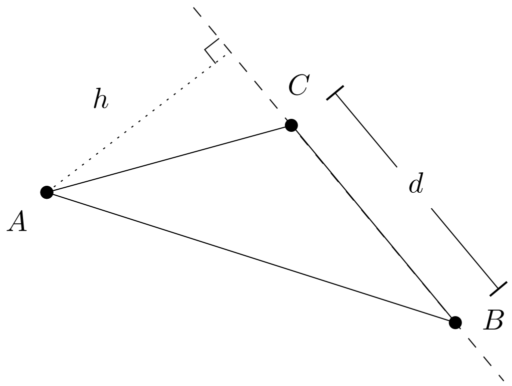
Agora, obteremos a fórmula para a área de um triângulo ABC, por meio de um raciocínio construtivo baseado na figura a seguir. Para isso, considere a reta r, paralela ao lado AB e passando por C, e a reta s, paralela ao lado BC e passando por A. Seja D o ponto de encontro dessas duas retas. Note que $ABCD$ é um paralelogramo, pois, por construção, possui lados opostos paralelos. Além disso, os triângulos ABC e CDA são congruentes (porque?), logo, possuem áreas iguais.



Portanto, a área do triângulo ABC é igual à metade da área do paralelogramo $ABCD$; assim sendo, é igual à metade do produto do lado $BC = d$ — que funciona como base do paralelogramo — pela altura h, que é a distância do vértice A até a reta BC. Em resumo,

$$[ABC] = \frac{d \times h}{2}.$$

Obs Qualquer lado do triângulo pode ser considerado como base. A base sempre é relativa a uma altura, que, por sua vez, corresponde ao segmento que liga um vértice à projeção ortogonal deste vértice sobre a reta que contém o lado oposto. A altura pode, inclusive, estar fora do triângulo, conforme mostrado na figura a seguir:



Na figura anterior, temos um triângulo ABC e a altura relativa ao lado BC, a qual é exterior ao triângulo. Além disso, observe que a base BC não está "na horizontal", quando dispomos a folha de papel na posição natural de leitura.

Nota ao(à) professor(a) 2.1 A demonstração da fórmula da área de um triângulo é importante por diversas razões e deve ser exposta em sala com destaque. Em primeiro lugar, a demonstração emprega noções de transformações isométricas que estão presentes na habilidade **(EM13MAT105)** da BNCC. Em segundo lugar, ao longo da demonstração são apresentados conceitos fundamentais da geometria euclidiana como a preservação da área de figuras que são modificadas por movimentos rígidos e que é possível calcular a área de figuras que podem ser decompostas e remontadas em outras figuras das quais já sabemos como calcular a área.

Problema 10 No triângulo ABC, a medida do lado BC é $60\,\text{cm}$ e a medida do lado AC é $50\,\text{cm}$. Além disso, a altura relativa do lado BC mede $25\,\text{cm}$. Calcule a medida da altura relativa ao lado AC.

Solução. Considerando BC como base, temos que

$$[ABC] = \frac{60 \cdot 25}{2} = 750\,\text{cm}^2.$$

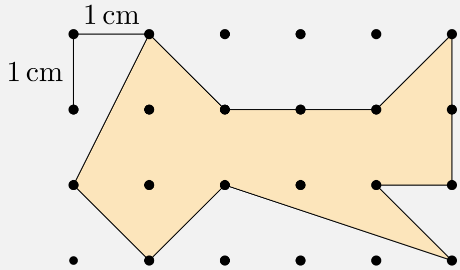
Por outro lado, considerando AC como base e chamando de h a altura correspondente, temos que

$$[ABC] = \frac{h{\times}50}{2} = 750\,\text{cm}^2.$$

Assim, $h = 30\,\text{cm}$. ∎

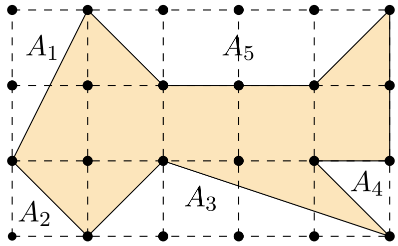
Agora vamos avançar um pouco e encontrar a área de polígonos cujos os vértices estão sobre os pontos de interseção das retas de um reticulado. Aqui não exigiremos que os lados do polígono estejam sobre as retas do reticulado.

Problema 11 — OBM. No reticulado a seguir, pontos vizinhos na vertical ou na horizontal estão a $1\,\text{cm}$ de distância.



Qual é a área da região sombreada?

(a) $7\,\text{cm}^2$. (c) $8{,}5\,\text{cm}^2$. (e) $9{,}5\,\text{cm}^2$.
(b) $8\,\text{cm}^2$. (d) $9\,\text{cm}^2$.



Solução. Vamos completar o retângulo que dá forma ao reticulado, calcular a área desse retângulo e calcular as áreas dos polígonos cuja soma representa a diferença entre a área sombreada e a área do retângulo. Depois disso, para calcular a área da região sombreada que foi pedida no problema, basta subtrair a soma das áreas dos polígonos da área do retângulo. A área do retângulo é igual a

$$3 \cdot 5 = 15\,\text{cm}^2.$$

Já a soma das áreas A_1, A_2, A_3, A_4, e A_5 é igual a

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 &= 1 + \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} + 3 \\ &= 7\,\text{cm}^2. \end{aligned}$$

Assim, a área sombreada é igual a

$$15 - 7 = 8\,\text{cm}^2.$$

■

Você pode assistir a resolução do Problema 11 no canal do Portal do Saber da OBMEP.

Saiba mais

Nota ao(à) professor(a) 2.2 O Problema 11 pode ser trabalhado em sala com o auxílio de um geoplano no qual os segmentos tracejados podem ser representados utilizando-se barbantes de uma cor, enquanto utiliza-se barbantes de outra cor para representar os segmentos contínuos. O professor pode convidar os alunos a criarem polígonos nos vértices do geoplano e que sejam sem auto-interseções e desafiarem os colegas a calcularem suas áreas. A mesma atividade pode também ser desenvolvida utilizando-se o GeoGebra ou até mesmo aplicativos gratuitos web. Saiba mais visitando os links:

Construindo um geoplano   Geoplano online

Essa discussão está relacionada com a habilidade **(EM13MAT505)** da BNCC que é descrita por *"Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados."*

Outra maneira de aprofundar o conteúdo presente no Problema 11 é através da **Fórmula de Pick** cujo o enunciado é o seguinte.

Teorema 2.1 — Fórmula de Pick. A área de um polígono simples, cujos vértices são pontos de um reticulado, é dada por

$$\frac{b}{2}+c-1, \tag{2.1}$$

em que b é a quantidade de pontos do reticulado que estão sobre o bordo do polígono e c é quantidade de pontos do reticulado que estão no interior do polígono.

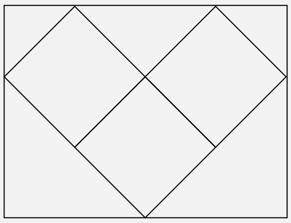
Do ponto de vista metodológico, apresentar a Fórmula de Pick é interessante por ser um momento adequado para apresentar também o Método Científico, apesar de que ela possui aplicações práticas limitadas. Convide os alunos a criarem polígonos com vértices em uma malha utilizando o GeoGebra. Em seguida, construa uma tabela na qual suas linhas apresentem os valores de b, c e da área de diversos polígonos. Incentive a turma a pensarem em uma fórmula que relacione essas três grandezas.

Neste ponto, é importante destacar que a Matemática se distingue de outras ciências pelo fato de que evidências empíricas não são consideradas provas. É interessante deixar isso claro para a turma. Por outro lado, a demonstração deste resultado é avançada e voltada especialmente para professores e para alunos de turmas olímpicas ou com excelente maturidade em Matemática. Para um público mais amplo, pode ser suficiente comentar que demonstrações precisas de fatos como esse são apresentadas em cursos de Matemática no ensino superior.

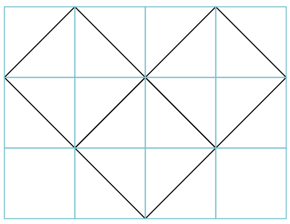
Construindo Malhas

Na Sequência de Problemas anterior, percebemos que a utilização de uma grade quadriculada facilita os cálculos dos perímetros e áreas de figuras planas. Porém, nem todos os enunciados dos problemas de Geometria trazem uma figura desenhada sobre uma grade. Entretanto, isso não significa que não podemos construir nossa própria grade como forma de facilitarmos a solução. Veja os seguintes problemas.

Problema 12 — OBM. Na figura abaixo, temos um retângulo circunscrito a três quadrados, cada um com $1\,\text{cm}^2$ de área. Qual é a área do retângulo?



Solução. Divida o retângulo em 12 quadrados menores através de cortes paralelos às diagonais dos três quadrados originais, formando uma grade quadriculada, conforme a seguinte ilustração.

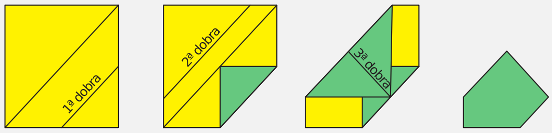


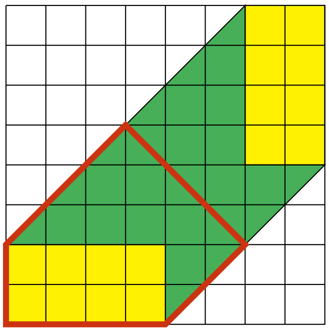
Observe que cada quadrado original é dividido em quatro triângulos menores congruentes. Portanto, cada um destes triângulos tem área $\frac{1}{4}\ cm^2$.

Por outro lado, a junção de dois destes triângulos formam um quadrado da grade. Logo, cada quadrado da grade tem área $2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ cm^2$. Consequentemente, a área do retângulo é igual a $12 \cdot \frac{1}{2} = 6\ cm^2$. ■

Nota ao(à) professor(a) 2.3 O Problema 12 também pode ser resolvido calculando-se as medidas dos lados do retângulo com o auxílio do Teorema de Pitágoras.

Problema 13 — OBMEP 2019. Uma folha quadrada de 8cm de lado foi dobrada três vezes, conforme mostrado nas seguintes figuras. A primeira e a segunda dobras ficaram paralelas a uma diagonal da folha, ao passo que a terceira dobra ficou perpendicular a essa diagonal. Qual é a área da figura final?





Solução. A fim de entendermos melhor as várias dobras, começamos quadriculando a folha, no seu formato original, em $8 \cdot 8 = 64$ quadradinhos iguais, cada um deles de lado $1\,\text{cm}$ e, portanto, área $1\,\text{cm}^2$.

A primeira dobra gerou um triângulo com um vértice sobre uma diagonal do quadrado. Como ela resultou paralela a essa diagonal, concluímos, pela próxima figura, que ela dividiu cada lado da folha original ao meio.

A segunda dobra, também feita paralelamente à mesma diagonal do quadrado, fez com que o vértice superior esquerdo, da folha original, coincidisse com o ponto médio da hipotenusa do triângulo mencionado anteriormente. Por sua vez, tendo em vista que os pontos médios das duas dobras estão situados sobre a outra diagonal do quadrado, deduzimos que a situação, da terceira dobra, é a ilustrada na próxima figura, na qual ela foi feita ao longo do segmento destacado com contorno mais grosso situado sobre a outra diagonal da folha original.

Assim, a figura final, cujo contorno está destacado, é formada por 15 quadradinhos e por 8 metades de quadradinhos, sendo, pois, equivalente a

$$15 + \left(8 \cdot \frac{1}{2}\right) = 19$$

quadradinhos.

Por fim, uma vez que cada um desses quadradinhos tem 1 *cm* de lado, concluímos que a área da figura final vale

$$19 \cdot 1 = 19\,\text{cm}^2.$$

■

Nota ao(à) professor(a) 2.4 O Problema 13 pode ser trabalhado utilizando-se folhas quadradas de papel. Neste projeto, os alunos são primeiramente instruídos a fazerem as dobras indicadas no enunciado. Em seguida, devem tirar foto da figura final e utilizarem o GeoGebra para estimarem o valor da área. Feito isso, o professor deve convidar os alunos a deduzirem o resultado obtido empiricamente utilizando um argumento lógico. Por fim, os alunos poderão desenhar a malha apresentada na solução para auxiliar nas contas.

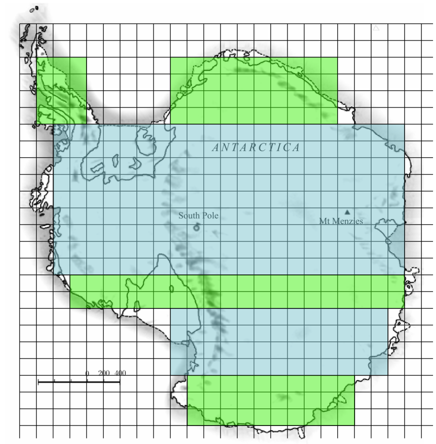


Figura 2.1: Aplicando uma malha quadriculada sobre um mapa para estimarmos a sua área.

Problema 14 — PISA - adaptado. No desenho a seguir, temos um mapa da Antártida, com uma escala em quilômetros. Faça uma estimativa da área do continente.

Solução. Em primeiro lugar, utilizamos a medida da escala para criar uma grade quadriculada, na qual cada quadrado tem lado igual a 200 quilômetros e, portanto, tem área igual a $200 \cdot 200 = 40.000\,\text{km}^2$, conforme a Figura 2.1. Em seguida, construímos retângulos para estimar a área da figura. A quantidade de quadrados que compõem os retângulos destacados é

$$12 + 40 + 189 + 40 + 52 + 30 = 363.$$

Portanto, podemos estimar o tamanho da Antártida em

$$363 \cdot 40.000 = 14.520.000\,\text{km}^2.$$

■

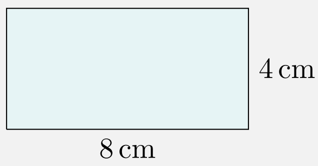
Observe que a medida da área calculada no problema anterior é apenas uma estimativa. Essa estimativa pode ser melhorada se construirmos uma malha **mais refinada** do que a malha construída para resolver o problema. Essa ideia pode ser utilizada para calcular a área de um círculo. Porém, esse resultado está fora dos objetivos desse material.

Exercícios Propostos

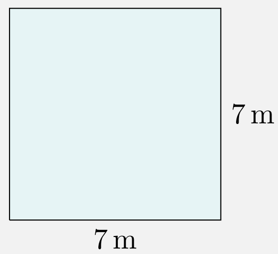
2.4.1 – Sequência 1

Problema 15 Encontre o perímetro e a área de cada figura abaixo.

(a)



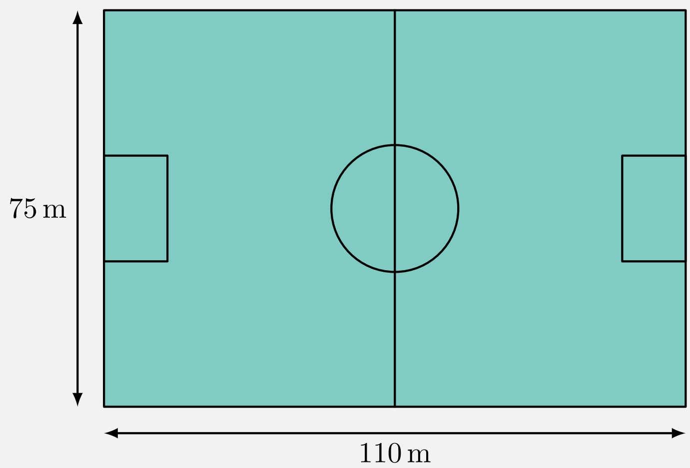
(b)



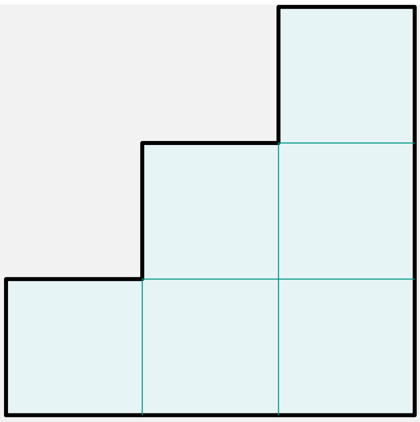
Problema 16 O campo de jogo da Arena Castelão tem o formato de um retângulo cujas dimensões são 110 m de comprimento e 75 m de largura.

(a) Encontre a área total ocupada pelo campo.

(b) Se os jogadores do Ceará derem três voltas completas ao redor do campo durante o aquecimento que acontece antes do jogo, quantos metros eles terão percorrido?



Problema 17 O jardim da casa de Joaquim é dividido em seis quadrados iguais, cada um deles contendo um único tipo de flor, como mostra a figura abaixo. Se a cerca que foi construída ao longo do perímetro do jardim tem 36 m de comprimento, qual é o lado de cada um dos quadrados que formam o jardim?



Problema 18 O perímetro de um retângulo é 46 cm e a sua largura é 7 cm. Encontre o comprimento desse retângulo.

Problema 19 O perímetro de um quadrado é 56 cm. Encontre a medida do lado desse quadrado.

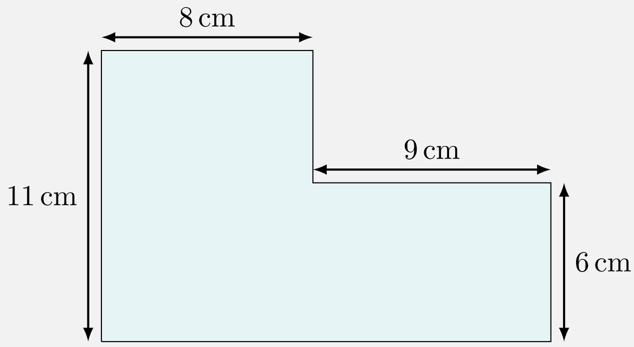
Problema 20 A área de um retângulo é 84 m^2. Encontre o comprimento desse retângulo, sabendo que a sua largura é 7 m.

Problema 21 A área de um quadrado é 49 m^2. Encontre o perímetro desse quadrado.

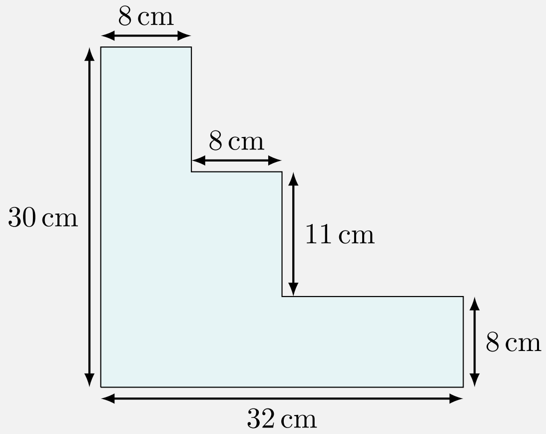
Problema 22 O perímetro de uma mesa retangular é 42 dm. Encontre o comprimento dessa mesa, sabendo que a sua largura é 8 dm.

Problema 23 O perímetro de um retângulo é 96 cm. Se o comprimento desse retângulo é o dobro da largura, qual é a área do retângulo?

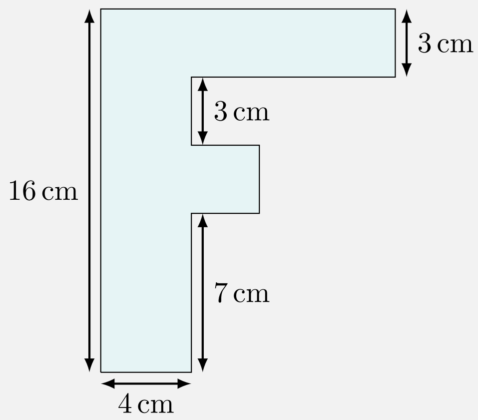
Problema 24 A figura abaixo foi montada juntando dois retângulos sem sobrepô-los. Encontre o seu perímetro.



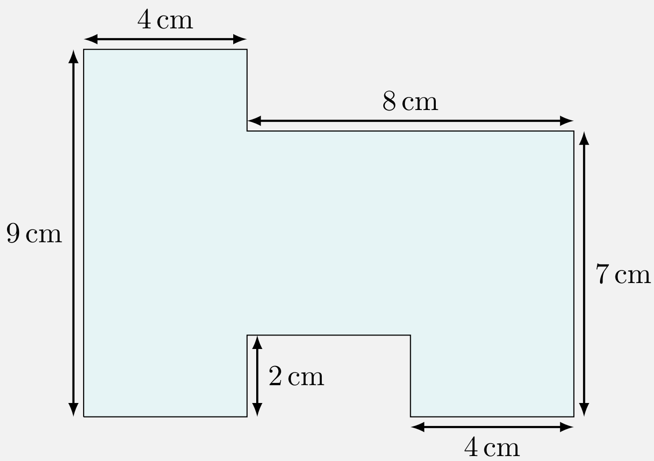
Problema 25 A figura abaixo foi montada juntando três retângulos sem sobrepô-los. Encontre o seu perímetro.



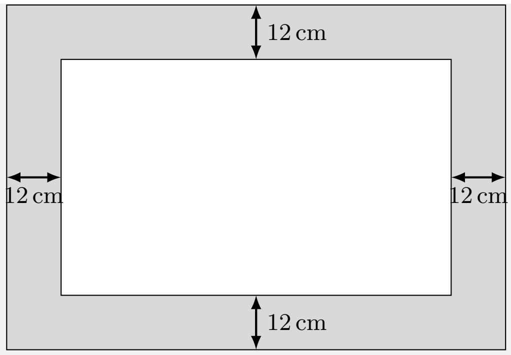
Problema 26 A figura abaixo foi montada juntando dois retângulos e um quadrado sem sobrepô-los. Encontre o perímetro e a área dessa figura.



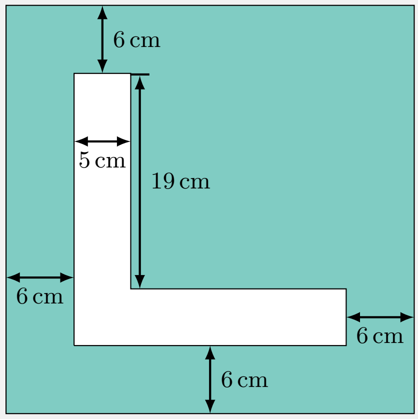
Problema 27 Encontre a área e o perímetro da figura abaixo.



Problema 28 Um quadro branco tem 86 cm de comprimento e 52 cm de largura. Esse quadro foi colocado no centro de retângulo cinza que foi pintado na parede, como podemos ver na figura abaixo. Calcule a área do retângulo cinza que está visível.



Problema 29 Para fazer um trabalho da escola, Fred recortou uma figura em formato de "L" de uma cartolina que tem a forma de um quadrado cujo lado mede 36 cm, como podemos ver na figura abaixo.



Qual é a área que restou na cartolina?

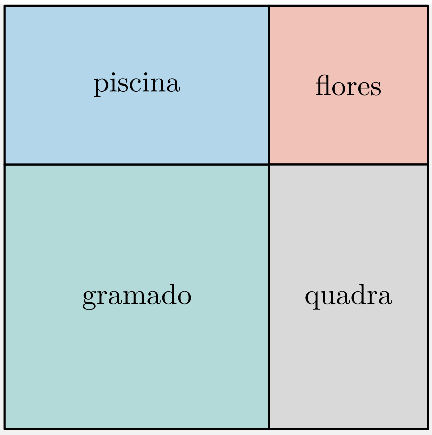
2.4.2 – Sequência 2

Problema 30 — SAEP 2013 - Adaptado. Alfredo tem o costume de correr em torno de um parque que tem formato retangular. As dimensões do parque são 500 metros de largura por 600 metros de comprimento. Todos os dias, Alfredo dá quatro voltas em torno do parque. Podemos afirmar que ele percorre diariamente um total de:

(a) 2,2 km (b) 4,4 km (c) 8,8 km (d) 300 km

Solução. O perímetro do parque é igual a $2 \cdot (500+600) = 2200$ metros. Contudo, essa é a distância que ele percorre ao dar uma única volta. Como Alfredo dá quatro voltas, a distância que ele percorre diariamente é igual a $4 \cdot 2200 = 8800$ metros. Agora, observe que as opções de resposta são dadas em quilômetros. Como 1000 metros correspondem a um quilômetro, temos que dividir o valor obtido em metros por 1000, a fim de obter o valor correspondente em quilômetros. Assim fazendo, concluímos que Alfredo percorre um total de 8,8 km; a resposta correta é o item (c). ■

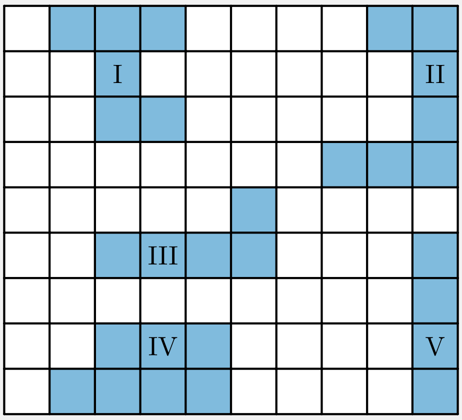
Problema 31 — Prova Brasil. Um terreno quadrado foi dividido em quatro partes, como mostra o desenho abaixo. Uma parte foi destinada para piscina, uma para a quadra, uma parte quadrada para o canteiro de flores e outra, também quadrada, para o gramado. Sabe-se que o perímetro da parte destinada ao gramado é 20 m e o da parte destinada ao canteiro de flores é 12 m.



Qual o perímetro da parte destinada à piscina?

Solução. Como a parte delineada para gramado é um quadrado e possui perímetro 20 metros, os lados desse quadrado medem $20/4 = 5$ metros. O canteiro de flores, também sendo um quadrado, e com perímetro 12 metros, deverá possuir lados medindo $12/4 = 3$ metros. Pela figura, podemos observar que um dos lados da piscina coincide com um do gramado e outro lado da piscina coincide com um do canteiro de flores. Logo, a piscina tem dimensões iguais a $5\,\text{m}$ metros e $3\,\text{m}$. Então, temos que o perímetro da piscina é $2 \cdot (5 + 3) = 16$ metros. ■

Problema 32 — SARESP 2007, adaptada. A figura seguinte é composta de uma malha tal que os lados dos quadradinhos possuem uma mesma medida e algumas regiões, numeradas de I a V, estão destacadas. Assinale a alternativa que traz duas regiões com um mesmo perímetro:



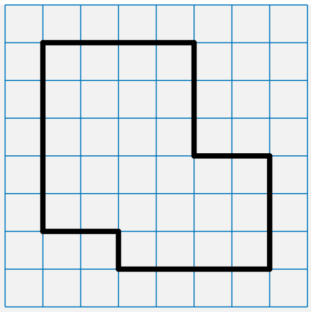
(a) III e IV. (b) II e III. (c) II e IV. (d) I e II.

Solução. Medindo-se em unidades de lados dos quadradinhos, a região I possui perímetro 14, a II possui perímetro 16, a III possui perímetro 12, a IV possui perímetro 12 e a V possui perímetro 10. Logo, a resposta correta é o item **(a)**. ■

Problema 33 — SARESP 2011. Um pedreiro usou 2000 azulejos quadrados e iguais para revestir $45\,\text{m}^2$ de parede. Qual é a medida, em cm, do lado de cada azulejo?

(a) 10. (b) 13. (c) 15. (d) 18. (e) 20.

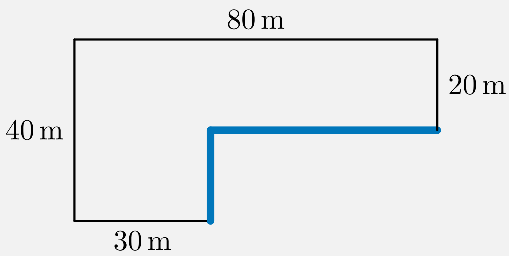
Problema 34 — CMF–2017. Na malha quadriculada abaixo, a figura em destaque representa uma ciclovia. Um ciclista deu quatro voltas completas nessa pista, percorrendo um total de 288 metros. É correto afirmar que a área delimitada por essa pista, em metros quadrados, é igual a:



(a) $243\,\mathrm{m}^2$.
(b) $252\,\mathrm{m}^2$.
(c) $279\,\mathrm{m}^2$.
(d) $2016\,\mathrm{m}^2$.
(e) $4032\,\mathrm{m}^2$.

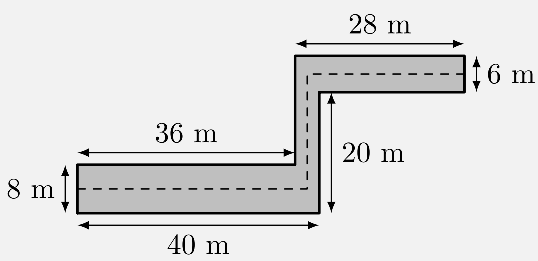
Solução. O ciclista deu 4 voltas e percorreu 288 metros. Logo, em cada volta ele precorreu $\frac{288}{4} = 72$ metros. Contando diretamente na figura, observamos que, em cada volta, o ciclista passa por 24 lados de quadrados da malha. Assim, o lado de cada quadrado representa uma distância de $\frac{72}{24} = 3$ metros. Logo, a área de cada quadrado corresponde a $3^2 = 9\,\mathrm{m}^2$. Por fim, também contando diretamente na figura, vemos que o número de quadrados na região delimitada pela ciclovia é 28. Portanto, a área dessa região é $28 \cdot 9 = 252\,\mathrm{m}^2$. ∎

Problema 35 Na figura a seguir, temos um terreno em forma de "L", tal que todos os pares de lados consecutivos formam ângulos a 90° ou 270°. Qual é a área desse terreno?



2.4.3 – Sequência 3

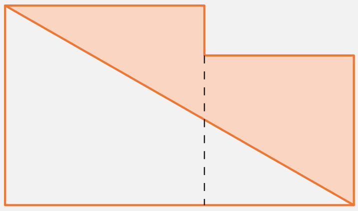
Problema 36 — Canguru 2019. Um corredor tem as dimensões mostradas na figura. Um gato andou por toda a linha tracejada no meio do corredor. Quantos metros o gato andou?



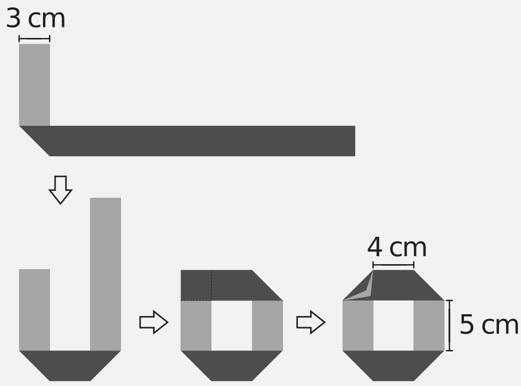
(a) 63.
(b) 68.
(c) 69.
(d) 71.
(e) 83.

Problema 37 — OBMEP 2014. A figura abaixo é formada por dois quadrados, um de lado 8 cm e outro de lado 6 cm. Qual é a área da região destacada em centímetros quadrados?

(a) 44.
(b) 46.
(c) 48.
(d) 50.
(e) 56.



Problema 38 — OBMEP 2015. Júlia dobrou várias vezes uma tira retangular de papel com 3cm de largura, como mostrado na figura. As dobras foram feitas de modo que cada uma delas forma um ângulo de 45° com os lados da tira. Qual é o comprimento da tira original?



Solução. O contorno externo da figura final, em formato de O, é igual a

$$5 + 4 + 5 + 4 + 4\ell = 18 + 4\ell,$$

onde ℓ é a medida das diagonais que formam os "cantos" da figura.

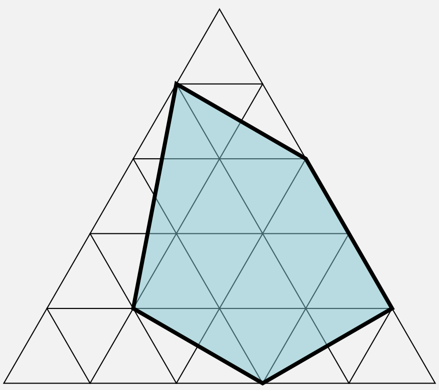
Por outro lado, um exame atento, das várias dobraduras realizadas por Júlia, nos permite concluir que cada dobra da fita faz a figura "perder" 3cm de comprimento e ganhar ℓ cm.

Portanto, raciocinando "de trás pra frente", percebemos que, para calcular o comprimento da tira original a partir do comprimento $18 + 4\ell$ do contorno externo do O, devemos somar 3 e descontar ℓ quatro vezes. Isso garante que a tira original tem comprimento igual a

$$(18 + 4\ell) + 4 \cdot 3 - 4\ell = 18 + 12 = 30\,\text{cm}.$$

■

Problema 39 — Olimpíada de Matemática de Goiás. Na figura a seguir, temos uma malha formada por triângulos equiláteros congruentes, todos de área igual a $|1\,\mathrm{cm}^2$. Qual é a área do pentágono destacado?



Na solução a seguir, utilizaremos colchetes para representar a área de figuras planas. Por exemplo, $[XYZ]$ denota a área do triângulo XYZ.

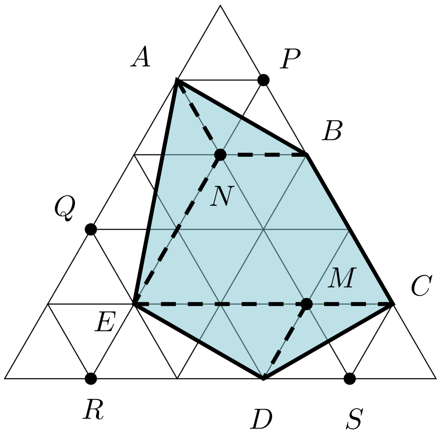


Figura 2.2: problema com malha triangular.

Solução. Sejam A,B,C,D,E os vértices do pentágono e sejam M,N,P,Q,R,S pontos auxiliares sobre os vértices da malha, conforme a Figura 2.2.

Observe que o pentágono $ABCDE$ pode ser decomposto em quatro triângulos ANB, ANE, EMD, MDC e um quadrilátero $NBCE$. Veja que o triângulo ANE é metade do paralelogramo $ANEQ$, o qual é formado por quatro triângulos de área $1\,\text{cm}^2$ cada. Assim, $[ANE] = \frac{4}{2} = 2\,\text{cm}^2$. De modo análogo, temos que:

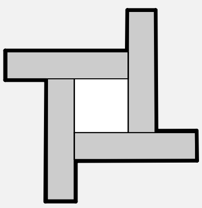
- O triângulo ANB é metade do paralelogramo $APBN$, o qual é formado por dois triângulos de área $1\,\text{cm}^2$. Logo, $[ANB] = \frac{2}{2} = 1\,\text{cm}^2$.
- O triângulo MCD é metade do paralelogramo $MCSD$, o qual é formado por dois triângulos de área $1\,\text{cm}^2$. Logo, $[MCD] = \frac{2}{2} = 1\,\text{cm}^2$.
- O triângulo EMD é metade do paralelogramo $EMDR$, o qual é formado por quatro triângulos de área $1\,\text{cm}^2$. Logo, $[ANB] = \frac{2}{2} = 2\,\text{cm}^2$.

Além disso, o quadrilátero $NBCE$ é formado por oito triângulos de área $1\,\text{cm}^2$. Logo, $[NBCE] = 8\,\text{cm}^2$. Portanto,

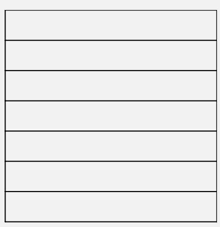
$$[ABCDE] = 2 + 1 + 1 + 2 + 8 = 14\,\text{cm}^2.$$

■

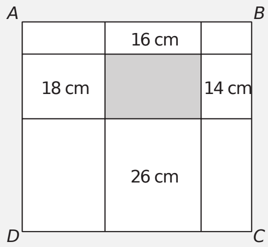
Problema 40 — OBMEP 2014. Juntando, sem sobreposição, quatro ladrilhos retangulares de 10 cm por 45 cm e um ladrilho quadrado de lado 20 cm, Rodrigo montou a figura abaixo. Com uma caneta vermelha ele traçou o contorno da figura. Qual é o comprimento desse contorno?



Problema 41 Um quadrado é dividido em sete retângulos, como mostrado na figura abaixo. Se o perímetro de cada um desses retângulos é 32cm, qual o perímetro do quadrado?



Problema 42 — OBMEP 2016. O retângulo $ABCD$ foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na figura. Se o perímetro do retângulo $ABCD$ é 54cm, qual o perímetro do retângulo cinza?

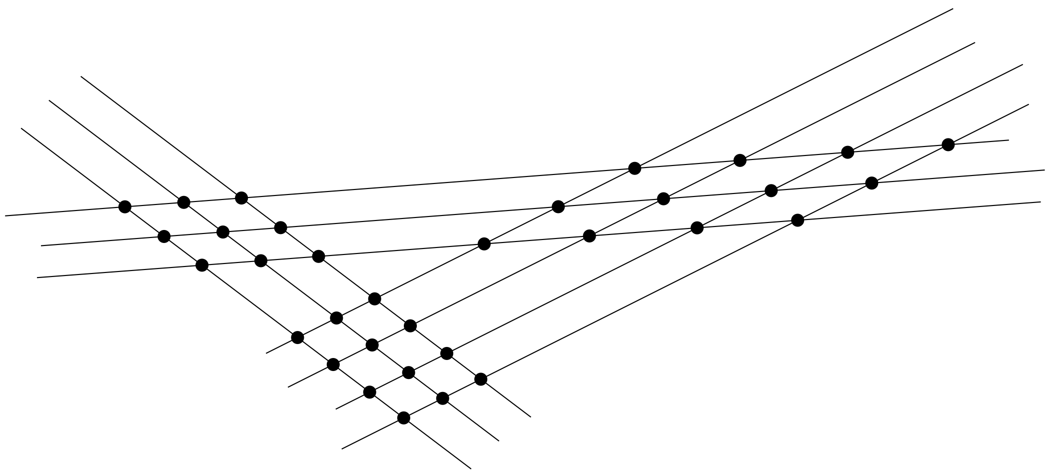


Problema 43 É possível desenhar 10 retas em uma folha de modo que existam exatamente 33 interseções entre essas retas?

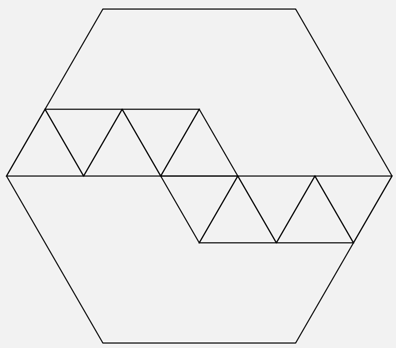
Sim, é possível. Considere três conjuntos de retas nos quais retas que estão no mesmo conjunto sejam paralelas e que retas que não estão no mesmo conjunto não sejam. Suponha que nos dois primeiros conjuntos há 3 retas em cada e que no terceiro há 4 retas. O número de interseções será

$$3 \times 3 + 3 \times 4 + 3 \times 4 = 33.$$

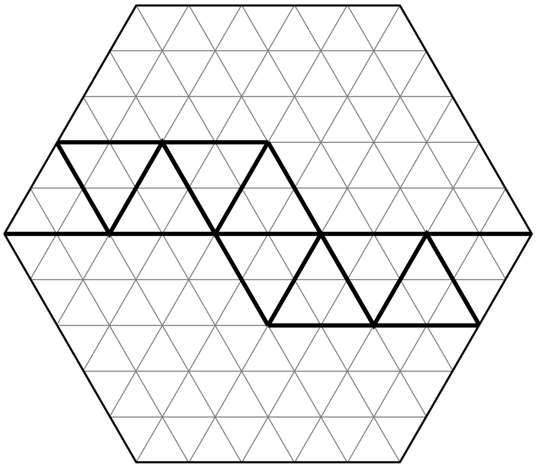
A figura a seguir ilustra um exemplo de tal configuração



Problema 44 Na figura a seguir, temos 10 triângulos equiláteros e um hexágono regular. Qual é proporção entre as áreas do hexágono e a soma das áreas dos triângulos?



Coloque a figura sobre uma malha triangular de modo que cada triângulo equilátero seja formado por exatamente quatro triângulos da malha. Obtemos então a seguinte figura

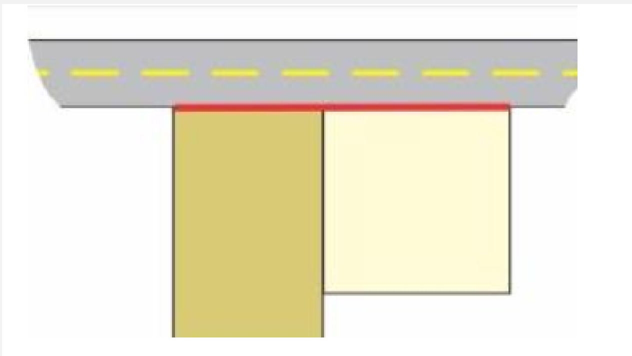


Nessa figura, podemos perceber que o hexágono é formado por $6 \cdot (1+3+5+7+9) = 150$ triângulos da malha. Portanto, a proporção solicitada é

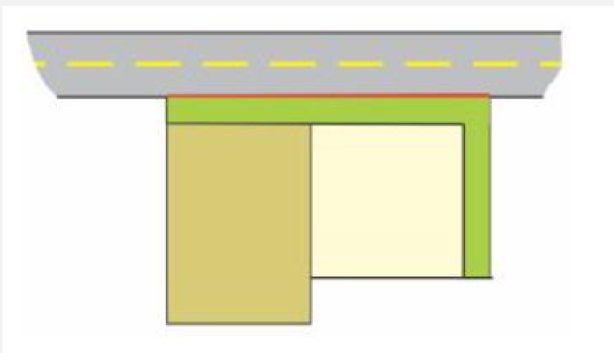
$$\frac{150}{40} = \frac{15}{4}.$$

Problema 45 — OBM 2021 - adaptado. Pedro tem dois terrenos vizinhos, um retangular e um quadrado, ambos de frente para uma rua. Cada um dos terrenos tem $400\,\mathrm{m}^2$ de área. Ele construiu um muro na frente dos dois terrenos, com $36\,\mathrm{m}$ de comprimento (linha mais grossa na figura).

(a) Quais são os perímetros (ou seja, soma das medidas dos lados) dos dois terrenos?



(b) Pedro fez um gramado de 2 m de largura, acompanhando o muro e a lateral do terreno quadrado, conforme a figura a seguir. Qual é a área total desse gramado?



3 Referências

- Alguns portais e plataformas
  - Portal da Matemática: https://portaldaobmep.impa.br
  - Khan Academy: https://www.khanacademy.org/math/cc-fifth-grade-math
  - Roda de Matemática: https://www.rodadematematica.com.br/
  - OBMEP: http://www.obmep.org.br/provas.htm
  - Canguru: https://www.cangurudematematicabrasil.com.br
- Alguns canais e vídeos
  - Isto é Matemática: https://www.youtube.com/c/istoematematica
  - OBMEP: https://www.youtube.com/user/OBMEPOficial
  - Matemaníaca: https://www.youtube.com/channel/UCz4Zuqtj9fokXH68gZJmCdA
  - Números na BBC Brasil: https://www.youtube.com/watch?v=Kgt3UggJ70k
  - Marcus Du Sautoy, The Code, BBC.
- Referências para desenvolvimento profissional

  - Boaler, Jo. Mentalidades matemáticas. Porto Alegre, Penso, 2018.
  - Ellison, Glenn. Hard math for elementary school. 2013.
  - Gauthier, Clermont et al. Ensino explícito e desempenho dos alunos: a gestão dos aprendizados. Petropólis, RJ: Vozes, 2014.
  - Dehaene, Stanislas. The number sense: how the mind creates mathematics - revised and updated edition. Oxford: Oxford University Press, 2011.
  - Oakley, Barbara et. al. A mind for numbers: how to excel at math and science. New York: TarcherPerigee, 2014.
  - Oakley, Barbara et al. Uncommon sense teaching. New York: TarcherPerigee, 2021.

- Referências sobre a temática do caderno

  - Dorichenko, S. Um círculo matemático de Moscou. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
  - Holanda, Bruno; Chagas, Emiliano. Círculos de Matemática da OBMEP, volume 2: primeiros passos em geometria. Rio de Janeiro: IMPA, 2021.
  - Murcia, Joseángel. Y me llevo una. Zaragoza: Nordica Libros, 2019.
  - Stillwell, John. Elements of Mathematics. Princeton: Princeton University Press, 2016.

CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

CIENTISTA CHEFE
EDUCAÇÃO

PACTO PELA APRENDIZAGEM

MAISPAIC