CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

CADERNO DE ATIVIDADES

FORTALECENDO APRENDIZAGENS

MATEMÁTICA

8° E 9° ANOS

PROFESSOR

CIENTISTA CHEFE EDUCAÇÃO
PACTO PELA APRENDIZAGEM
MAISPAIC

Volume 3

GOVERNADOR
Camilo Sobreira de Santana

VICE-GOVERNADORA
Maria Izolda Cela de Arruda Coelho

Secretária da Educação	Eliana Nunes Estrela
Secretário Executivo de Cooperação com os Municípios	Márcio Pereira de Brito
Assessora Especial de Gabinete	Ana Gardennya Linard
Coordenadora de Cooperação com os Municípios para Desenvolvimento da Aprendizagem na Idade Certa	Bruna Alves Leão
Articuladora da Coordenadoria de Cooperação com os Municípios para Desenvolvimento da Aprendizagem na Idade Certa	Marília Gaspar Alan e Silva
Equipe da Célula de Fortalecimento da Alfabetização e Ensino Fundamental - Anos Finais	Izabelle de Vasconcelos Costa (Orientadora) Tábita Viana Cavalcante (Gerente) Ednalva Menezes da Rocha Galça Freire Costa de Vasconcelos Carneiro Rafaella Fernandes de Araújo
Leitura Crítica	Tábita Viana Cavalcante Miranda
Revisão Gramatical	Ednalva Menezes da Rocha
Equipe Programa Cientista Chefe em Educação Básica	Jorge Herbert Soares de Lira (Coordenador)
Elaboração e revisão de texto	Antonio Caminha M. Neto Bruno Holanda Emiliano Augusto Chagas Fabrício Siqueira Benevides Fernando Antonio Amaral Pimentel Jorge Herbert Soares de Lira Samuel Barbosa Feitosa Ulisses Parente

Sumário

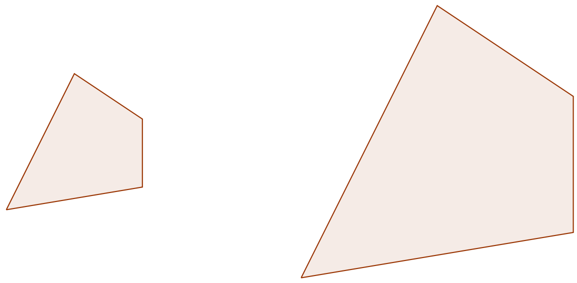
1 Semelhanças e Congruências

A necessidade de entender o que acontece no nosso entorno leva naturalmente ao uso das faculdades ou atributos da inteligência. Essas faculdades se processam por meio de atos mentais que, em um primeiro esforço de compreensão da realidade, procuram encontrar tanto as diferenças entre os semelhantes como as semelhanças entre os diferentes para poder classificar e catalogar os eventos ao nosso redor.

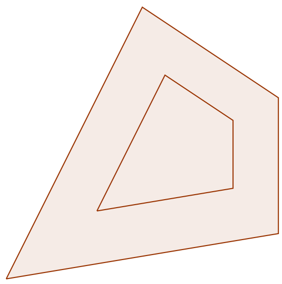
Por conta disso, mesmo que não saibamos definir exatamente o que é ser semelhante, todos devemos ter essa noção para poder viver no mundo sem confundir o que é igual com o que é parecido ou completamente diferente. Assim, não é de estranhar que a Geometria faça uso dessa noção para enunciar e estudar resultados que lhe são cruciais.

1.1 – Semelhanças de Figuras Planas

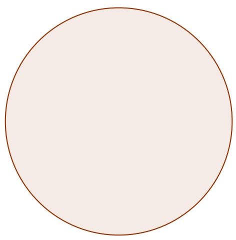
Quem olhar os quadriláteros abaixo imediatamente verá que eles não são iguais.



De fato, podemos tomar como evidente que, quando duas figuras não são iguais, podemos deslocar uma delas e colocar sobre a outra de modo que não haja superposição entre elas. No caso das figuras acima, podemos deslocar o quadrilátero da esquerda de modo que ele fique dentro do quadrilátero da esquerda, como vemos abaixo. As figuras então não são iguais.



De fato, os quadriláteros não são iguais mas não são tão diferentes assim, pois salta ao olhos que eles são parecidos. Dizemos então que, apesar de não terem o mesmo tamanho, eles têm a mesma forma, logo são *semelhantes*. Estamos agora com outro problema: o que é ter (ou não ter) a mesma forma?



Por que o círculo ao lado e os quadriláteros acima não têm a mesma forma?

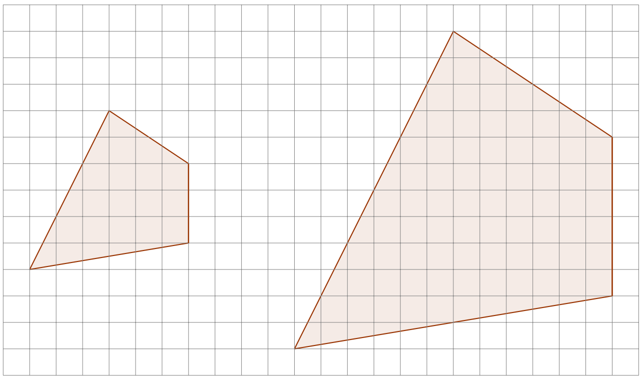
Em geral, sabemos quando duas figuras têm a mesma forma. Com isso, queremos dizer que, dadas duas figuras, a maior parte das pessoas vai concordar se elas são ou não são semelhantes. Assim, os dois quadriláteros acima são semelhantes, mas um círculo não é semelhante a nenhum deles.

1.2 – Critério Objetivo de Verificação de Semelhança

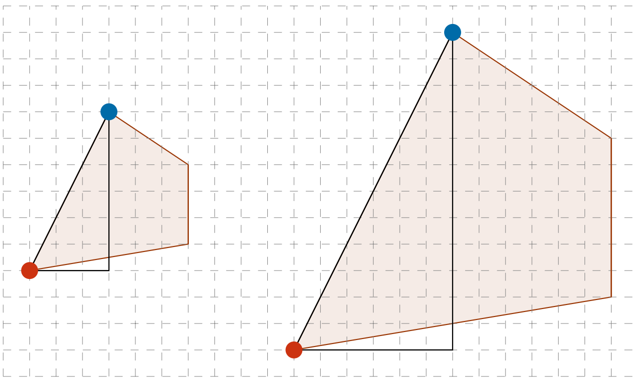
A fim de transformar a noção de semelhança em um conceito útil, que possa ser aplicado em Geometria, precisamos de uma definição objetiva de semelhança de figuras.

Observação 1.1 Dizemos que uma afirmação é objetiva quando sua veracidade ou falsidade independe de quem a enuncia, a escuta ou lê. Se uma afirmação não é objetiva, ela é subjetiva. Assim, quando uma pessoa diz que um certo prato é saboroso, ela está afirmando que o prato é saboroso para ela pois outra pessoa pode discordar. Trata-se então de uma afirmação subjetiva. Por sua vez, a afirmação "$2+2=4$" sempre é verdadeira qualquer que seja a circunstância em que for dita, logo é objetiva. Outros exemplos de afirmações objetivas: "eu estou aqui", "$2+2=5$", "Portugal é o país mais populoso do mundo" (lembrando que afirmações objetivas podem ser objetivamente *falsas*).

A fim de chegar a um critério objetivo de semelhança, vamos pôr duas figuras notoriamente semelhantes dentro de uma malha quadriculada.



Comparando pares de vértices correspondentes nas duas figuras na malha acima, verificamos que a distância entre pares de vértices no quadrilátero maior é sempre o dobro da distância entre o par de vértices correspondente no quadrilátero menor, como vemos no exemplo discutido logo abaixo.



Observe que os vértices dos triângulos retângulos destacados acima são vértices correspondentes dos respectivos quadriláteros. Os triângulos retângulos foram escolhidos de modo que o segmento entre esses vertices é a hipotenusa dos triângulos retângulos que os contém. Assim, calcular a distância entre esses vértices é calcular o comprimento da hipotenusa dos triângulos retângulos. Vamos, então, admitir que o lado de cada quadradinho da malha vale uma unidade a fim de usar a malha para medir distâncias.

O primeiro triângulo retângulo tem catetos medindo 3 e 6 unidades. Pelo Teorema de Pitágoras, o comprimento de sua hipotenusa é

$$h = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

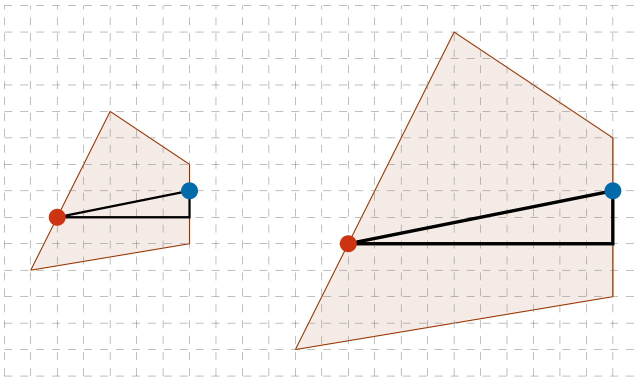
A seu turno, o segundo triângulo retângulo, de catetos 6 e 12, tem hipotenusa

$$H = \sqrt{6^2 + 12^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}.$$

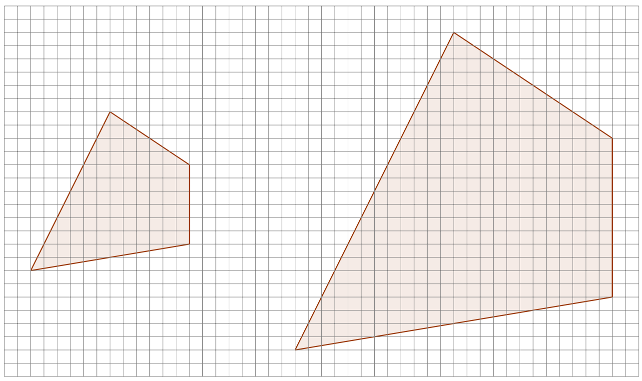
Assim, $H = 2h$, ou seja, as distâncias entre esses pares de vértices no primeiro e segundo quadrilátero estão entre si na razão $1 : 2$. Traçando retângulos auxiliares como os acima rapidamente vê-se que a distância entre pares de vértices no segundo quadrilátero é o dobro da distância entre os vértices correspondentes no primeiro quadrilátero.

Chamamos de pontos da malha os vértices dos quadradinhos da malha. E dizemos que dois pontos em quadriláteros distintos são correspondentes quando estiverem em lados correspondentes nos respectivos quadriláteros de modo que as distâncias de um dos pontos às extremidades do respectivo lado estão entre si como estão as distâncias do outro ponto às extremidades correspondentes do lado em que se apoia no outro quadrilátero.

Assim, na figura a seguir, os pontos de mesma cor são pontos correspondentes nos dois quadriláteros que também são pontos de malha.



Traçamos então os triângulos retângulos retângulos da figura e observamos que os pontos correspondentes nos dois quadriláteros são as hipotenusas dos triângulos retângulos. Aplicando o mesmo tipo de argumento que utilizamos acima, concluímos que a distância entre os pontos vermelho e azul no quadrilátero maior é o dobro da distância entre os pontos correspondentes no quadrilátero menor.



Como vemos na figura acima, podemos refinar a malha tanto quanto quisermos de tal maneira que quaisquer pares de pontos correspondentes dos quadriláteros ou sejam pontos de malha ou estejam arbitrariamente próximos de pontos de malha. Fazendo isso, nos convencemos que a distância entre pares correspondentes de pontos nos quadriláteros menor e maior, respectivamente, estão entre si na proporção 1:2. Nessas condições, verificamos que os quadriláteros acima são a mesma figura em escalas diferentes, em que uma delas resulta de uma ampliação ou redução da outra. É natural ver nisso a explicação de duas figuras parecerem tanto a ponto de serem semelhantes.

Duas figuras, isto é, dois subconjuntos do plano, são semelhantes quando uma resultar de uma ampliação ou reduçao da outra. Esta ampliação ou redução faz corresponder pontos de uma figura a pontos da outra figura de tal modo que se a distância entre dois pontos quaisquer da primeira figura é d_1 e a distância entre os par de pontos correspondentes na segunda figura é d_2, então a razão d_1/d_2 é igual a um certo r quaisquer que sejam os pares de pontos. O número r é chamado de razão de semelhança entre as figuras.

Assim, podemos dizer que o quadrilátero menor resulta de uma redução do quadrilátero maior que é uma semelhança de razão $1/2$ entre os quadriláteros ou, equivalentemente, o quadrilátero maior resulta de uma ampliação de razão 2 do quadrilátero menor.

Quando a razão de semelhança entre duas figuras planas é igual a 1, dizemos que as figuras são congruentes. Nesse caso, chamamos de isometria a relação de semelhança que se estabelece entre as figuras.

Nota ao(à) professor(a) 1.1 Nesse momento, é interessante fazer uma breve revisão sobre razões e proporções, pois o estudante pode não lembrar, ou mesmo saber, que dois números p e q estão entre si na proporção $a : b$ quando $p/q = a/b$. O professor pode então aproveitar a oportunidade para falar de frações irredutíveis, mostrando com exemplos como simplificar uma fração. Assim,

$$\frac{30}{45} = \frac{2\times\cancel{3}\times\cancel{5}}{3\times\cancel{3}\times\cancel{5}} = \frac{2}{3}.$$

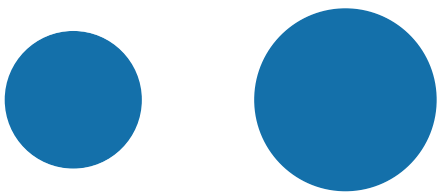
Logo, 30 está para 45 na proporção $2 : 3$.

Outro aspecto a ser destacado no texto acima tem a ver com as limitações do uso de malhas para mostrar resultados como os que empregamos para justificar a definição de semelhança.

De fato, por mais que se refine uma malha, existem pontos que nunca serão pontos de malha, cujas distâncias a pontos de malha consecutivos estão entre si numa proporção irracional. Nesse caso, pode-se tomar refinamentos sucessivos da malha e formar sequências de pontos de malha que se aproximam arbitrariamente do ponto estudado. Assim, se os pontos da sequência tem uma dada propriedade, o ponto estudado, que está *no limite* da sequência, também a apresentará.

É óbvio que uma justificativa razoavelmente rigorosa desse argumento está além do que normalmente se espera de uma exposição para alunos no ensino fundamental. No entanto, o professor pode apelar para a noção intuitiva de continuidade, que todos nós temos, a fim de ajudar seus alunos a entender esse ponto. Afinal de contas, todos nos convencemos com Gottfried Leibniz (1646-1716), um dos descobridores do Cálculo Infinitesimal, o ramo da matemática que estuda essas questões de limite e continuidade, que *Natura non facit saltus* (A Natureza não dá saltos). Essa afirmação foi devidamente questionada com o advento da *Mecânica Quântica*, a parte da Física Moderna que estuda a Natureza até a escala atômica. Mas isso é outra história...

Exemplo 1 Dois circulos de raios r e R são sempre semelhantes e a razão de semelhança entre eles é R/r. De fato, supondo $r < R$, se ampliarmos o círculo de raio r pela razão R/r obteremos o círculo maior.

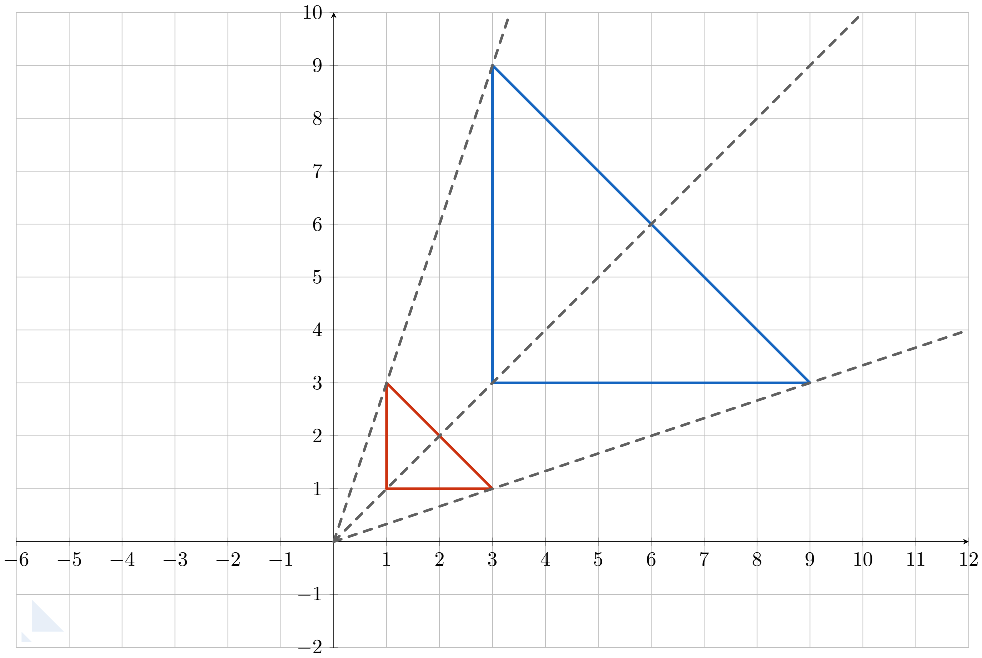


Exemplo 2 Todos os quadrados são semelhantes entre si pois, quando não são congruentes, podem ser obtidos uns dos outros por ampliações e reduções. De modo geral, dois retângulos são semelhantes quando têm lados correspondentes proporcionais.

Apenas figuras da mesma cor são semelhantes

Exemplo 3 Vamos apresentar um procedimento para realizar ampliações e reduções de uma figura qualquer. Seja então uma figura no plano coordenado. A fim de obter uma outra figura, semelhante à primeira com razão de semelhança r, multiplicamos todos os pontos (x,y) da figura original por r, resultando disso pontos de coordenadas (rx,ry). Isso equivale a fazer uma mudança de escala na figura, preservando sua forma.

Um exemplo de ampliação realizada por esse procedimento é esboçado na figura a seguir.



Acima vemos dois triângulos no plano coordenado. Nesse caso, o triângulo em vermelho é levada no triângulo em azul por uma ampliação de fator $r = 3$. Essa ampliação é efetuada multiplicando as coordenadas de cada vértice (na verdade de cada ponto) do triângulo em vermelho por 3. Assim, os vértices do triângulo vermelho, cujas coordenadas são (1,1), (3,1) e (1,3) são levados, respectivamente, nos pontos (3,3), (9,3) e (3,9), que são os vértices to triângulo azul.

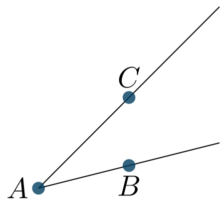
Para Saber Mais: Uma *transformação* é uma correspondência entre pontos do plano. Acima mostrou-se como fazer ampliações e reduções por meio de transformações do plano que chamamos de *homotetias*. Com efeito, a fim de definir uma homotetia, fixa-se um ponto O no plano e se escolhe um número positivo r, a razão de homotetia. Então, a homotetia faz corresponder a cada ponto P do plano o ponto P' tal que

$$\overrightarrow{OP'} = r\overrightarrow{OP}.$$

Assim, para definir reduções e ampliações fizemos uso de homotetias em que o centro de homotetia O é a origem dos eixos coordenados.

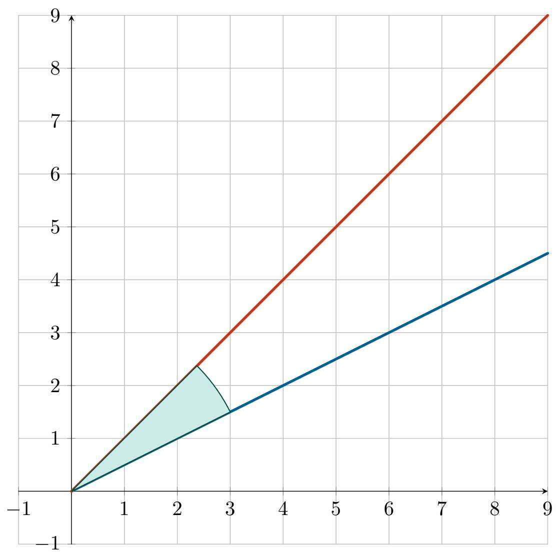
Na verdade, para caracterizar ampliações e reduções, podemos escolher homotetias com centro em qualquer ponto do plano. Vamos nos valer desse fato no próximo exemplo, em que vamos estudar o efeito de semelhança em ângulos. Por conta dele, poderemos considerar os vértices dos ângulos considerados na origem dos eixos coordenados.

Exemplo 4 Deve soar óbvio que "parecer implica ser igual em alguma coisa". É natural então pensar que semelhanças preservam algo das figuras reduzidas ou ampliadas. Caso contrário a figura inicial e a figura obtida pelo processo de redução ou ampliação em nada pareceriam.



Uma propriedade de figuras que é preservado pelas semelhanças é o ângulo determinado por três pontos A, B e C da figura, ângulo este formado pelas semirretas de origem o ponto A que passam por B e C.

Assim, por exemplo, os triângulos semelhantes acima em azul e vermelho têm ângulos internos correspondentes iguais. Outra situação em que se vê a preservação de ângulos por semelhanças ocorre quando consideramos duas semirretas com extremidades na origem dos eixos coordenados.



Observe que as semirretas acima, por terem a extremidade na origem dos eixos coordenados, são preservadas por ampliações e reduções efetuadas multiplicando cada ponto do plano por uma constante r. De fato, tais *transformações* levam essas semirretas nelas mesmas, logo preservam os ângulos que elas formam.

1.3 – Semelhanças de Triângulos

Se formos aplicar diretamente a definição de semelhança de figuras planas para mostrar que dois triângulos são semelhantes, teremos de destacar todos os pares de pontos correspondentes nos dois triângulos a fim de verificar se suas distâncias estão entre si em uma dada proporção. Obviamente, esse procedimento é impraticável.

Devemos, então, recorrer a outro tipo de abordagem para estudar a semelhança entre dois triângulos. Para tanto, lembramos um triângulo é totalmente caracterizado pelo comprimento de seus lados e pela medida dos seus ângulos internos. Assim, ao invés de encará-los como meros conjuntos de pontos, é melhor descrever as propriedades em termos desses parâmetros.

Podemos agora estudar as situações em que dois triângulos são semelhantes. Queremos, então, esgotar *os casos de semelhança de triângulos*, ou seja, descrever todas as condições que implicam a semelhança de dois triângulos em termos do comprimento dos seus lados e da medida dos seus ângulos internos.

A seguir listamos todos os casos de semelhança de triângulos.

Caso LLL. Dois triângulos são semelhantes se têm os 3 pares de lados correspondentes proporcionais.

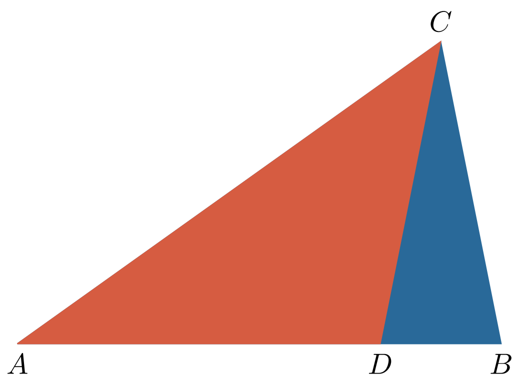
Observe que se dois triângulos têm apenas **dois** pares de lados correspondentes proporcionais, esses triângulos não são necessariamente semelhantes. Como contraexemplo, temos os triângulos isósceles abaixo. Esses triângulos não são semelhantes porque se o fossem teriam ângulos internos correspondentes iguais. Isso claramente não ocorre porque o triângulo azul é acutângulo, isto é, todos os seus ângulos internos medem menos que 90°, por isso são agudos. O triângulo vermelho, por sua vez, é obtusângulo, pois um dos seus ângulos internos mede mais que 90°.

O contraexemplo se estabelece quando observamos que, apesar de não serem semelhantes, os lados opostos às bases nos dois triângulos, que são iguais, estão entre si na mesma proporção.

Caso LAL. Dois triângulos são semelhantes se têm dois pares de lados numa mesma proporção e, além disso, os ângulos formado pelos lados correspondentes proporcionais são iguais.

Revendo a discussão acima, observamos que não basta dois triângulos terem dois pares de lados correspondentes proporcionais. Para serem semelhantes, ou o terceiro par de lados é proporcional ou os ângulos formados pelos lados correspondentes são iguais.

Também é necessário observar que se dois triângulos têm dois pares de lados proporcionais e um par de ângulos correspondentes iguais que **não** seja o ângulo formado pelos lados correspondentes proporcionais, então os triângulos nem sempre são semelhantes. A figura a seguir mostra um contraexemplo com essa configuração.



Na figura acima temos o ângulo $\hat{A}$ comum aos triângulos ABC e ADC. Temos também dois pares de lados correspondentes proporcionais (na verdade, congruentes). De fato, AC é comum aos dois triângulos e $BC = DC$. No entanto, como se pode ver na figura, os triângulos ABC e ADC não são semelhantes.

Caso AA. Dois triângulos são semelhantes se têm dois ângulos correspondentes iguais.

Como a soma dos ângulos ínternos dos triângulos é igual a 180°, se dois triângulos ABC e $A'B'C'$ têm dois pares de ângulos correspondentes iguais entre si, por exemplo, $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$, então o terceiro par de ângulos correspondentes também terá a mesma medida, pois

$$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 180 - \hat{A}' - \hat{B}' = \hat{C}'.$$

Por conta disso, no terceiro e último caso de semelhança de triângulos só se exige que dois triângulos tenham dois pares de ângulos correspondentes iguais para serem semelhantes.

Obviamente, um único par de ângulos iguais não é suficiente para garantir que dois triângulos são semelhantes, como vimos no contraexemplo apresentado na discussão do caso LAL.

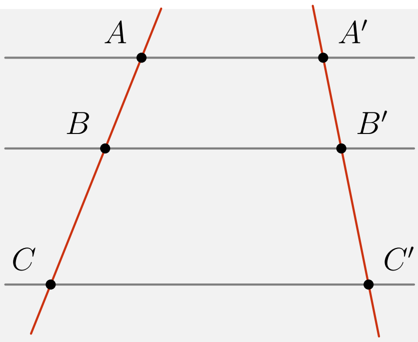
1.4 – Aplicações dos Casos de Semelhança de Triângulos

Exemplo 5 Tales de Mileto, um dos sete sábios da Antiga Grécia, viveu entre 624 e 546 AC. Considerado o primeiro filósofo do Ocidente, também foi pioneiro na aplicação do raciocínio dedutivo para obter e provar resultados em Geometria. O teorema enunciado a seguir leva seu nome no Brasil e em muitos outros países.

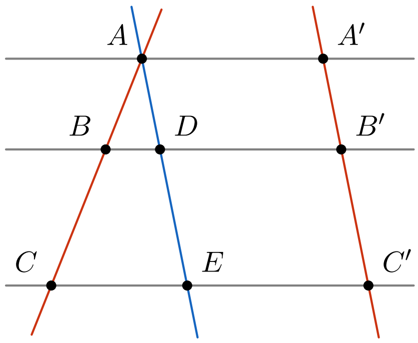
(Teorema de Tales) A figura abaixo mostra o par de retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$ cortadas pelas retas paralelas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$. Então, são válidas as igualdades

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Assim, os segmentos determinados pelos pontos em que as retas paralelas intersectam as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$ são proporcionais.



Em uma aplicação dos casos de semelhança de triângulos, vamos provar o Teorema de Tales. Iniciamos traçando pelo ponto A a *reta auxiliar* paralela à reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ — a reta em azul na figura abaixo, que determina nas retas $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ os pontos D e E, respectivamente, como vemos abaixo.



Um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos é chamado de *paralelogramo*. Assim, os quadriláteros $ADB'A'$, $AEC'A'$ e $DEC'B'$ são paralelogramos, porque têm lados opostos contidos em retas paralelas. É um fato conhecido que os lados opostos de um paralelogramo têm comprimentos iguais. Logo os segmentos AD e $A'B'$ têm a mesma medida, porque são lados opostos do paralelogramo $ADB'A'$. Observe, agora, que os triângulos ABD e ACE são semelhantes pelo caso AA de semelhança de triângulos. De fato, $\angle BAD$ e $\angle CAE$ denotam o mesmo ângulo. Além disso, os ângulos $\angle ABD$ e $\angle ACE$ são iguais, por serem ângulos correspondentes formados por uma mesma reta transversal a duas retas paralelas.

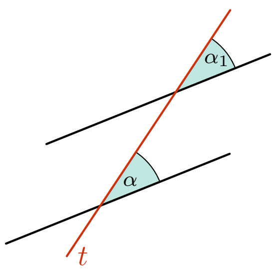


Figura 1.1: Uma transversal t a duas retas paralelas forma com essas retas ângulos correspondentes α e α_1 de mesma medida.

Em consequência dessas afirmações, temos que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{A'B'}{A'C'}, \tag{1.1}$$

em que a primeira igualdade decorre da relação de semelhança entre os triângulos ABD e ACE, enquanto a segunda igualdade vem de serem iguais os lados opostos dos paralelogramos $ADB'A'$ e $AEC'A'$.

Aplicando, nas igualdades da equação (1.1), as propriedades de frações estudadas no módulo 3, levamos o numerador da última fração para o denominador da primeira fração, e o denominador da primeira fração para o numerador da última, concluindo que

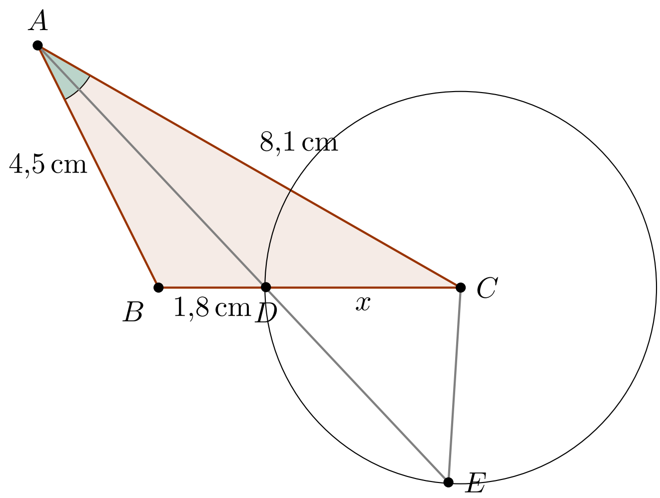
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Para mostrar que $BC/B'C' = AC/A'C'$, podemos adaptar o argumento acima traçando, pelo ponto C, uma reta paralela à reta $\overleftrightarrow{A'C'}$. Outra maneira de verificar essa igualdade consiste em observar que

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AC - AB}{A'C' - A'B'} = \frac{BC}{B'C'},$$

já que $(AB/A'B') = (AC/A'C')$.

No próximo exemplo vamos verificar o Teorema da Bissetriz Interna.



Exemplo 6 Na Figura acima, o segmento AD é a bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$. São conhecidos os comprimentos dos lados AB e AC e do segmento BD, como indicado na figura. Nesse exemplo, vamos calcular o valor do comprimento x do segmento CD. Esse cálculo é efetuado aplicando a definição e as propriedades dos triângulos isósceles, que lembramos abaixo.

Obs Um triângulo é dito isósceles quando possui dois lados iguais, sendo a sua base o lado distinto dos dois sabidamente iguais. Uma propriedade importante de todo triângulo isósceles, que utilizaremos a seguir, é serem iguais os ângulos formados entre a sua base e os outros dois lados.

Traçamos, então, o círculo de centro C e raio x e, em seguida, prolongamos a segmento AD até ele encontrar esse círculo novamente, no ponto E. Assim, o triângulo DCE é isósceles com base DE pois $CE = CD = x$. Em consequência disso, os ângulos $\angle CED$ e $\angle CDE$ são iguais, pois são os ângulos da base do triângulo isósceles DCE. Agora observe que $\angle CDE = \angle ADB$ pois, são ângulos opostos pelo vértice. Combinando essas igualdades, obtemos que $\angle CED = \angle ADB$.

Por conseguinte, os triângulos ABD e ACE são semelhantes com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$, $D \leftrightarrow E$ pelo caso AA pois têm dois ângulos iguais: $\angle CAD = \angle BAD$ e $\angle CED = \angle ADB$. Assim,

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC}$$

ou, como $CE = CD$,

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}.$$

Sendo $CD = x$, obtemos que, em centímetros,

$$x = \frac{AC \times BD}{AB} = \frac{8{,}1 \times 1{,}8}{4{,}5} = 3{,}24.$$

O argumento acima pode ser empregado em situações semelhantes e mostra que a razão entre as medidas de dois lados de um triângulo é igual à razão entre as medidas dos segmentos em que o terceiro lado é dividido pela bissetriz interna do seu ângulo oposto qualquer que seja o triângulo. Esse resultado de Geometria, que pode ser guardado por você e utilizado livremente daqui em diante, é conhecido como o *Teorema da Bissetriz Interna*.

1.4.1 – Importância do Ensino de História da Matemática

Uma Curiosidade

Certamente, muitos vão se surpreender ao saber que o teorema das paralelas e transversais que apresentamos acima **não** é universalmente chamado de Teorema de Tales. Assim, por exemplo, nos países de língua inglesa, esse resultado é conhecido como “the Intercept Theorem”, ou, em tradução literal, o Teorema da Interceptação, que pode soar meio esquisito em Português.

Nisso, os autores em língua inglesa são coerentes com o fato de nenhum texto antigo conhecido relacionar Tales de Mileto com o resultado que, entre nós, leva seu nome. Embora esse teorema fosse conhecido pelos babilônios e egípcios, cuja civilização precedia a dos gregos, sua primeira exposição detalhada com demonstração se deve ao matemático grego Euclides, em seus famosos *Elementos*, que nasceu cerca de 250 anos após a morte de Tales.

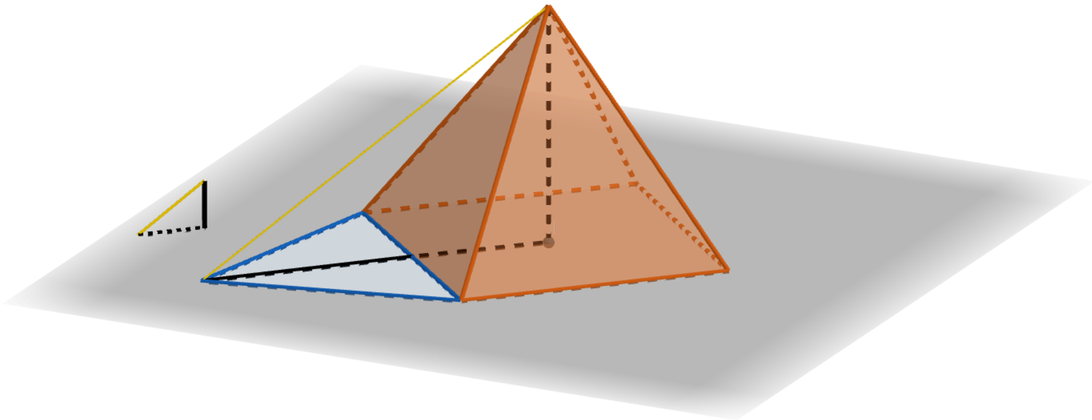
A origem da atribuição desse teorema a Tales de Mileto parece estar em uma diretiva do Ministério da Instrução do governo da França de fins do século XIX para que se imputassem nomes de matemáticos célebres aos resultados mais importantes. O objetivo dessa recomendação seria incentivar o estudo da História da Matemática. Devido à enorme influência da cultura francesa, tal nomenclatura se difundiu para além de suas fronteiras e acabou se estabelecendo no Brasil graças aos escritores de livros didáticos, que buscavam nos manuais franceses bem mais que inspiração para suas obras.

Nota ao(à) professor(a) 1.2 O professor pode então se valer dessa e de outras curiosidades para, seguindo a diretriz do Ministério da Instrução da França oitocentista, estimular o gosto tanto pela Matemática como por sua história. De fato, um bom caminho para facilitar o aprendizado da Matemática parece ser entremear o estudo dos seus resultados e teoremas com anedotas e casos divertidos, que ajudem a contextualizá-los e, assim, explicá-los.

O exemplo a seguir mostra uma situação em que a História da Matemática ajuda a melhorar a exposição de uma aplicação dos casos de semelhança de triângulos.

Exemplo 7 Em um comentário aos Elementos de Euclides, o matemático e escritor bizantino Proclus (412-585 D.C.) conta a seguinte história sobre Tales de Mileto.

Segundo Proclus, Tales teria medido a altura da Pirâmide de Queops por um artifício que teria admirado o próprio Faraó. Ele partiu da observação que em um certo dia, a sombra da pirâmide pirâmide de Queops é um triângulo isósceles cuja base é uma das arestas da pirâmide. Também observou que num certo horário desse dia, o comprimento de uma haste é igual ao comprimento de sua sombra no solo.



Tales então intuiu que a altura da pirâmide é igual à distância da sombra do seu ápice ao centro da pirâmide. Essa distância, por sua vez, é igual à soma da distância da sombra do ápice da pirâmide ao ponto médio da aresta mais próxima da pirâmide com a metade do comprimento de uma aresta da pirâmide, como vemos na figura acima.

A fim de justificar o procedimento supostamente empregado por Tales que acabamos de apresentar, observamos que o triângulo de vértice ABC e $A'B'C'$, em que A é o ápice da pirâmide, B o seu centro, C é a sombra de A, A' é a extremidade superior da haste, B' sua extremidade inferior e C' é a sombra de A' são semelhantes pois os ângulos correspondentes nos dois triângulos são iguais.

Exemplo 8 Os gigantes são personagens recorrentes nos mitos e nos contos de fada. Desde a mais antiguidade se contam estórias com gigantes. Assim, na mitologia grega os gigantes são filhos de *Gaia*, a personificação da Terra, que lutaram contra os Deuses uma guerra que ficou conhecida por *gigantomaquia*.

Nesse conflito, os gigantes, atendendo a um apelo de Gaia, sua mãe, afrontam os deuses gregos deixando enorme rastro de morte e destruição sobre o mundo. A fim de derrotá-los, os deuses têm de se valer do poderoso auxílio do héroi Herácles, pois, de acordo com antiga profecia, um gigante só pode ser vencido se enfrentar um mortal e um deus ao mesmo tempo.

Gigantes também lutam com os deuses na mitologia escandinava, com consequências ainda mais desastrosas que na gigantomaquia, pois, na batalha final dessa guerra, conhecida por *Ragnarok*, os gigantes assaltam *Asgard*, a citadela do deuses, e causam destruição tão grande que precipita o fim do mundo.

Também há relatos bíblicos envolvendo gigantes, ali conhecidos por *nephilim*, que teriam assolado a terra antes do dilúvio. Um remanescente desses gigantes teria sido o famoso *Gigante Golias* a ponto de golias virar sinônimo de gigante.

Figura 1.2: H. J. Ford- 1890 (Domínio Público)

Dentre os gigantes de contos de fada, o mais conhecido talvez seja o personagem de "João e o Pé de Feijão", em que o garoto João sobe em um pé de feijão mágico até um castelo acima das nuvens onde mora um gigante, de quem surrupia três tesouros, um saco de ouro, a galinha dos ovos de ouro e uma harpa falante, também de ouro. A gravura acima, com João fugindo do Gigante carregando a harpa dourada, é uma das ilustrações da compilação de contos de fada *The Red Book*, de Andrew Lang.

Tanta história com gigante faz pensar se estas não foram inspiradas por gigantes reais, que teriam existido em épocas remotas. Ao considerar essa questão, Galileu Galilei (1564-1642), o *pai da ciência moderna*, propôs um curioso argumento para mostrar que não podem existir gigantes em tudo iguais a nós, exceto no tamanho descomunal.

Galileu observou que as áreas de figuras semelhantes com razão de semelhança r estão entre si na proporção $r^2 : 1$. E que os volumes de sólidos semelhantes de mesma razão de semelhança r estão entre si na proporção $r^3 : 1$. Dessa forma, se um gigante for 10 vezes maior que um ser humano de estatura média, seu peso será $10{\times}10{\times}10 = 1000$ vezes maior e uma seção transversal dos seus ossos terá $10{\times}10 = 100$ vezes a área da seção correspondente de um osso humano. Como a resistência dos ossos é proporcional à sua seção transversal, a carga sobre os ossos do gigante acabará fazendo com que se quebrem com muito mais facilidade.

O professor poderá, então, aproveitar essas estórias de gigantes para levantar duas questões:

- Como se estende a definição de semelhança de figuras planas para sólidos?
- Como justificar a observação de Galileu para a razão de áreas de figuras semelhantes?

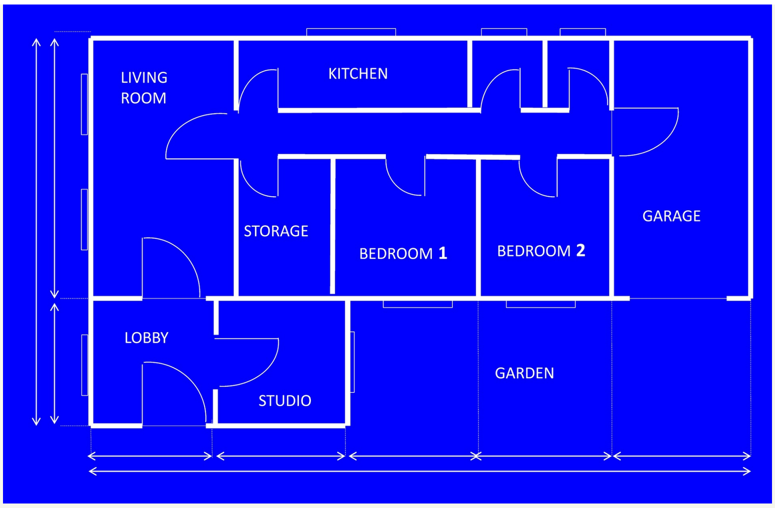
A resposta à primeira pergunta é fácil de obter, pois ela é a extensão imediata da resposta da questão análoga para figuras planas. Assim, dois sólidos são semelhantes quando as distâncias entre pares de pontos correspondentes estão entre si em uma dada proporção. Isso pode ser justificado por um procedimento semelhante ao empregado aqui na discussão sobre área de figuras planas. Dessa maneira, deverão ser considerados esferas, cubos, prismas e pirâmides semelhantes, obtidos um do outro por ampliações e reduções, para mostrar que satisfazem a definição de semelhança para os corpos sólidos proposta acima.

O estudante pode ser convencido da veracidade da observação de Galileu, isto é, que áreas de figuras semelhantes estão entre si na proporção do quadrado da razão de semelhança, ao ver que quadrados semelhantes de lados l e L têm área l^2 e L^2. Assim, a razão de semelhança entre eles é L/l e a razão entre suas áreas é $(L/l)^2$.

A extensão desse resultado para razão de áreas de pares arbitrários de figuras semelhantes pode ser feita empregando malhas quadriculadas cada vez mais refinadas. Pode-se tentar, por exemplo, contar o número de quadrados da malha dentro dos quadriláteros semelhantes da última figura da página 3, em que a razão de semelhança entre os quadriláteros é igual a 2. Assim, a quantidade de quadrados da malha no interior do quadrado maior é aproximadamente 4 vezes a quantidade de tais quadrados no quadrilátero menor

1.5 – Exercícios Resolvidos

Exercício 1.1 A planta baixa de uma casa está representada na figura abaixo.



© by Tumisi from Pixabay

A área que representa a cozinha (“kitchen”) é cerca da metade da área que representa a sala de estar (“living room”) na planta. Sabendo que a cozinha tem 25 metros quadrados de área, qual a área da sala de estar?

Solução. Segundo o enunciado, a razão entre a área da sala de estar e a área da cozinha é igual a

$$\frac{2}{1} = 2.$$

Como a área da cozinha é igual a 25 metros quadrados, então a área da sala de estar mede o dobro desta, ou seja, 50 metros quadrados.

Solução alternativa. Representando a área da sala de estar por x, temos a seguinte proporção (igualdade ou equivalência de frações).

$$\frac{x}{25} = \frac{2}{1}.$$

Multiplicando os dois lados desta igualdade por 25, obtemos

$$x = 25 \times 2.$$

Portanto, $x = 50$ metros quadrados.

Exercício 1.2 Ainda com relação à planta no exercício anterior, suponhamos que a escala usada nesta planta é 1 : 200, ou seja, 1 centímetro na planta corresponde a 200 centímetros, ou seja, 2 metros na realidade. Sendo assim, obtenha as seguintes estimativas.

(a) As dimensões do jardim (“garden”), sabendo que, na planta, as dimensões são 7 centímetros e 2 centímetros.
(b) As dimensões da garagem (“garage”), sabendo que, na planta, as dimensões são 2,5 centímetros e 4,5 centímetros.
(c) As dimensões da casa, sabendo que, na planta, as dimensões são 11 centímetros e 6,5 centímetros.
(d) As áreas do jardim e da garagem.

Solução. 1. A escala da planta é de 1 centímetro para cada 200 centímetros, ou seja, 2 metros na construção real. Assim, 2 centímetros na planta correspondem a

$$2 \times 200 \text{ centímetros} = 400 \text{ centímetros} = 4 \text{ metros}$$

na casa real, ao passo que 7 centímetros na planta correspondem a

$$7 \times 200 \text{ centímetros} = 1.400 \text{ centímetros} = 14 \text{ metros}$$

na realidade. Portanto, as dimensões do jardim são 4 metros e 14 metros.

2. De modo similar, vemos que as dimensões reais da garagem são

$$2{,}5\times 200 \text{ centímetros} = 500 \text{ centímetros} = 5 \text{ metros} \quad \text{e}$$
$$4{,}5\times 200 \text{ centímetros} = 900 \text{ centímetros} = 9 \text{ metros}.$$

3. Com respeito às dimensões reais da casa, temos

$$11\times 200 \text{ centímetros} = 2.200 \text{ centímetros} = 22 \text{ metros} \quad \text{e}$$
$$6{,}5\times 200 \text{ centímetros} = 1.300 \text{ centímetros} = 13 \text{ metros}.$$

Em geral, se x representa um comprimento (em centímetros) no mapa e y representa o comprimento real (em centímetros), temos

$$y = 200x,$$

ou seja,

$$\frac{y}{x} = 200,$$

sempre que $x \neq 0$.

4. A área do jardim é calculada *multiplicando* suas dimensões reais, isto é,

$$4\times 14 = 56 \text{ metros quadrados}.$$

Observe que o produto das dimensões na escala é

$$2\times 7 = 14 \text{ centímetros quadrados}.$$

A razão entre a área real e a área do jardim na planta é igual a

$$\frac{56 \text{ “metros quadrados”}}{14 \text{ “centímetros quadrados”}} = \frac{56\times 100\times 100 \text{ “centímetros quadrados”}}{14 \text{ “centímetros quadrados”}}$$
$$= \frac{56\times 10.000}{14} = \frac{4\times 10.000}{1} = 40.000.$$

Note que esta razão é o *quadrado* da razão entre os comprimentos, isto é, o quadrado de 200.

Já a área do garagem é dada também multiplicando suas dimensões reais:

$$5\times 9 = 45 \text{ metros quadrados}.$$

A área total da casa, por fim, é dada por

$$22\times 13 = 286 \text{ metros quadrados}.$$

Exercício 1.3 Para atrair compradores, as construtoras exibem maquetes, isto é, modelos em miniaturas de edifícios de apartamentos residenciais. Sabendo que a escala, isto é, a razão entre as dimensões da maquete e do que ela representa, é igual a $\frac{1}{50}$,

Image by Anna Pan'šina from Pixabay

qual é a altura real do edifício se a maquete tem 90 centímetros de altura?

Solução. A razão

$$\frac{1}{50}$$

indica que 1 centímetro na maquete corresponde a 50 centímetros no edifício real. Portanto, 90 centímetros na maquete correspondem a

$$90\times 50 \text{ centímetros} = 4.500 \text{ centímetros} = 45 \text{ metros}$$

no edifício real. Logo, a altura real é dada por 45 metros.

Exercício 1.4 O edifício representado pela maquete virtual no exercício anterior tem dois tipos de apartamentos, com a razão entre suas áreas sendo igual a $\frac{3}{4}$. Qual a área do maior apartamento, sabendo que o menor tem 120 metros quadrados de área?

Solução. Representemos a área do maior apartamento, que não conhecemos, por x. Como as áreas da maquete devem ser *proporcionais* às áreas dos apartamentos reais, temos a mesma *razão* entre as áreas na maquete, ou seja, $\frac{4}{3}$, e as áreas reais, isto é, $\frac{x}{120}$. Logo,

$$\frac{x}{120} = \frac{4}{3}.$$

Multiplicando os dois lados da equação por 120, temos

$$x = 120\times\frac{4}{3} = 40\times 4 = 160 \text{ metros quadrados},$$

o que nos fornece a área do maior apartamento.

Uma variação interessante deste exercício é a seguinte.

Exercício 1.5 O edifício representado pela maquete virtual no exercício anterior tem dois tipos de apartamentos, sendo que a razão entre suas áreas é de $\frac{3}{4}$. Qual a área do menor apartamento, sabendo que a soma das áreas dos dois apartamentos, um de cada tipo, é igual a 210 metros quadrados?

Solução. Este é um exemplo de uma divisão em partes proporcionais. Observe que a área do menor apartamento é $\frac{3}{4}$ da área do maior. Assim, se dividíssemos a área total dos dois, que é igual a 210 metros quadrados, em sete partes iguais de 30 metros quadrados, o apartamento menor corresponderia a 3 destas partes, isto é, a

$$3\times 30 = 90 \text{ metros quadrados},$$

enquanto que o apartamento maior corresponderia a 4 destas partes, isto é, a

$$4\times 30 = 120 \text{ metros quadrados}.$$

A solução alternativa que propomos agora é mais algébrica e, portanto, também importante para o estudo das *equações lineares*, que faremos mais adiante.

Solução alternativa. Seja x a área do menor apartamento. Então, a área do maior é dada por $210 - x$, já que a área total dos dois é 210 metros quadrados. Logo, a razão entre a área do maior apartamento e a área do menor apartamento é

$$\frac{210 - x}{x} = \frac{4}{3}.$$

Multiplicando, agora, os dois lados por x, temos

$$210 - x = \frac{4}{3}x$$

Assim, somando x aos dois lados da equação, obtemos

$$210 = x + \frac{4}{3}x$$

Portanto,

$$210 = \frac{7}{3}x.$$

Dividindo os dois lados da equação por 7, obtemos

$$30 = \frac{1}{3}x.$$

Multiplicando os dois lados da equação por 3, concluímos que

$$x = 90 \text{ metros quadrados},$$

a área do apartamento menor.

Exercício 1.6 O custo para revestir o piso de um apartamento de 90 metros quadrados, com porcelanato, é igual a R$ 4.500,00. Nestas mesmas condições, qual é o custo para revestir o piso do apartamento de 120 metros quadrados?

Solução. Como o custo para revestir 90 metros quadrados de piso é igual a R$ 4.500,00, cada metro quadrado de porcelanato custa

$$\frac{4.500}{90} = 50 \text{ reais}.$$

Portanto, o revestimento de 120 metros quadrados com o mesmo material custa

$$120 \times 50 = 6.000 \text{ reais}.$$

Solução alternativa. Podemos resolver este problema do seguinte modo. Se x simboliza o custo do revestimento do apartamento de 120 metros quadrados, temos a proporção

$$\frac{x}{4.500} = \frac{120}{90},$$

o que significa que o custo varia na mesma proporção que a área a ser revestida. Ou seja, o custo x está para R$ 4.500 assim como a área 120 metros quadrados está para 90 metros quadrados.

Multiplicando os dois lados da equação por 4.500, obtemos

$$x = 4.500 \times \frac{120}{90},$$

donde concluímos que

$$x = 50 \times 120 = 6.000 \text{ reais}.$$

Podemos representar esta solução com o seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
90 \text{ metros quadrados} & \text{———} & \text{R\$ } 4.500 \\
\downarrow & : 90 & \downarrow \\
1 \text{ metro quadrado} & \text{———} & \text{R\$ } 50 \\
\downarrow & \times 120 & \downarrow \\
120 \text{ metros quadrados} & \text{———} & \text{R\$ } 6.000
\end{array}$$

Exercício 1.7 Dados recentes mostram que o custo médio para construção civil é de cerca de R$ 1.500,00 por metro quadrado, sendo, aproximadamente, 40% do custo total com material e 60% com mão-de-obra. As demais despesas, administrativas e com equipamentos, não são relevantes. A partir destas informações, calcule

(a) o custo médio, por metro quadrado, com material;
(b) o custo médio, por metro quadrado, com mão-de-obra;
(c) a razão, em média, entre o custo com material e o custo com mão-de-obra.

Observação 1.2 Lembramos que porcentagens são frações com denominador igual a 100. Por exemplo, 40% é apenas uma *maneira de escrever* a fração $\frac{40}{100}$, que tem numerador 40 e denominador 100. Da mesma forma, 60% é, de fato, uma maneira alternativa de representar a fração $\frac{60}{100}$. Observe que, quando escrevemos "40% de 120", queremos dizer

$$\frac{40}{100}\times 120 = \frac{40\times 120}{100} = \frac{4800}{100} = 48.$$

Da mesma forma, "60% de 120' significa, apenas, a fração

$$\frac{60}{100}\times 120 = \frac{60\times 120}{100} = 72.$$

Solução. 1 e 2. O custo com material, por metro quadrado, representa 40% do total, ou seja,

$$\frac{40}{100}\times 1.500 = 40\times 15 = 600 \text{ reais},$$

ao passo que o custo com mão-de-obra, por metro quadrado, representa 60% do total, isto é,

$$\frac{60}{100}\times 1.500 = 60\times 15 = 900 \text{ reais}.$$

3. Logo, a razão entre o custo com material e o custo com mão-de-obra é igual a

$$\frac{600}{900} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Exercício 1.8 Estima-se que, em 2019, o custo médio para construção civil foi de R$ 1.500,00 por metro quadrado. A previsão é que este custo aumente 5% em 2020. Com base nestas informações, responda:

(a) qual a previsão de custo médio por metro quadrado em 2020?
(b) Quanto passará a custar a construção de uma casa com 300 metros quadrados?
(c) Qual o aumento previsto, de 2019 para 2020, do custo de construção de uma casa de 300 metros quadrados?

Solução. 1. A expressão "aumento de 5%" significa que devemos adicionar 5% de R$ 1.500,00 ao custo médio anterior, ou seja, a R$ 1.500. Portanto, calculemos, inicialmente 5% de R$ 1.500. Temos

$$5\% = \frac{5}{100}$$

e, portanto,

$$5\% \text{ de R\$}\,1.500 = \frac{5}{100}\times 1.500 = 5\times 15 = 75 \text{ reais}.$$

Logo, o novo custo médio é de

$$1.500 + 5\% \text{ de } 1.500 = 1.500 + 75 = 1.575,$$

ou seja, R$ 1.575,00.
2. Com o custo médio por metro quadrado ajustado para R$ 1.575,00, o custo da construção de uma casa de 300 metros quadrados passa a ser de

$$300\times 1.575 = 472.500 \text{ reais}.$$

3. Note que o custo para construção dos mesmos 300 metros quadrados seria, antes do aumento de 5%, igual a

$$300\times 1.500 = 450.000 \text{ reais}.$$

Portanto, o acréscimo no custo total para construção da casa é de

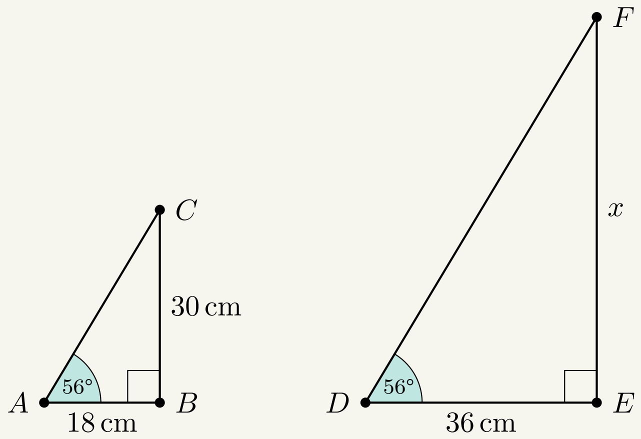
$$300\times 1.575 - 300\times 1.500 = 300\times 75 = 22.500 \text{ reais}.$$

Este aumento corresponde à fração

$$\frac{22.500}{450.000} = \frac{22.500 : 45}{450.000 : 45} = \frac{500}{10.000} = \frac{5}{100} = 5\%,$$

do custo total, calculado antes do aumento, como seria de suspeitar.

Exercício 1.9 Qual o valor de x no triângulo DEF?



(a) 36 cm.
(b) 48 cm.
(c) 50 cm.
(d) 70 cm.
(e) 72 cm.

Solução. Os triângulos ABC e DEF da Figura são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo, porque têm dois ângulos ordenadamente congruentes. De fato, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ medem ambos 56° e os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{E}$ são retos. Agora, observe que a razão de semelhança entre os triângulos DEF e ABC é 2, pois o comprimento do lado DE no triângulo DEF, que é igual a 36 cm, é o dobro da medida do lado correspondente AB, no outro triângulo, que é igual a 18 cm. Assim, $\overline{FE}/\overline{BC} = 2$. Substituindo, nessa última igualdade, os valores das medidas dos segmentos $\overline{FE}$ e $\overline{BC}$, obtemos $x = 60\,\text{cm}$. ■

Exercício 1.10 O triângulo ABC é cortado por uma reta $\overleftrightarrow{MN}$, paralela ao lado BC. Sabendo que M e N são pontos em AB e AC, respectivamente, que $(\overline{AM}/\overline{MB}) = 3/2$ e $\overline{AN} = 27$, calcule o valor de $\overline{NC}$.

Solução. Pelo Teorema de Tales, discutido no Exemplo 6,

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}.$$

Assim,

$$\frac{27}{\overline{NC}} = \frac{3}{2},$$

e, portanto, $\overline{NC} = 18$.

Exercício 1.11 Justifique a afirmação: os triângulos ABC, DBA e DAC da, Figura **??**, são semelhantes entre si.

Solução. Iniciamos destacando o fato que cada um desses triângulos tem um ângulo reto, pois os ângulos $\angle BAC$, $\angle BDA$ e $\angle ADC$ medem todos 90°. Agora, afirmamos que os ângulos $\angle ABC$, $\angle DBA$ e $\angle DAC$, nos triângulos ABC, DBA e DAC, respectivamente, são congruentes, ou seja, têm uma mesma medida. Para mostrar isso, começamos observando que $\angle ABC$ e $\angle DBA$ são notações diferentes para um mesmo ângulo. Em seguida, como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°, temos

$$\measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB = 180°;$$
$$\measuredangle ADC + \measuredangle DAC + \measuredangle DCA = 180°.$$

Veja que a primeira equação acima afirma que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo ABC é igual a $180°$, enquanto a segunda equação diz o mesmo sobre os ângulos internos do triângulo DAC. Como vimos acima, $\measuredangle BAC = \measuredangle ADC = 90°$. Além disso, $\angle ACB$ e $\angle DCA$ são notações diferentes de um mesmo ângulo. Portanto,

$$\measuredangle ABC = 180° - \measuredangle BAC - \measuredangle ACB = 180° - \measuredangle ADC - \measuredangle DCA = \measuredangle DAC.$$

Logo, os ângulos $\angle ABC$, $\angle DBA$ e $\angle DAC$ têm uma mesma medida. Consequentemente, quaisquer dois dos triângulos ABC, DBA e DAC são semelhantes, por terem dois pares de ângulos correspondentes com mesmas medidas.

Exercício 1.12 Calcule as medidas dos lados de todos os triângulos da Figura **??**.

Solução. No Exemplo 4 calculamos o valor de $\overline{AD} = 6\,\text{cm}$. Usando as relações obtidas a partir da semelhança entre os triângulos ABC e DBA, temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}.$$

Assim, $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC} = 3 \times 15 = 45$, de sorte que $\overline{AB} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Da mesma maneira, mostramos que $\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{BC} = 12 \times 15$, logo, $\overline{AC} = 6\sqrt{5}$.

Solução alternativa. Como o valor de $\overline{AD}$ é conhecido e os triângulos da Figura **??** são todos retângulos (ou seja, um dos ângulos internos de cada um deles mede $90°$), uma solução alternativa desse problema emprega duas vezes o *Teorema de Pitágoras*, o qual afirma que, num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa, que é o lado oposto ao ângulo reto, é igual à soma dos quadrados de seus catetos, que são os outros dois lados. Assim,

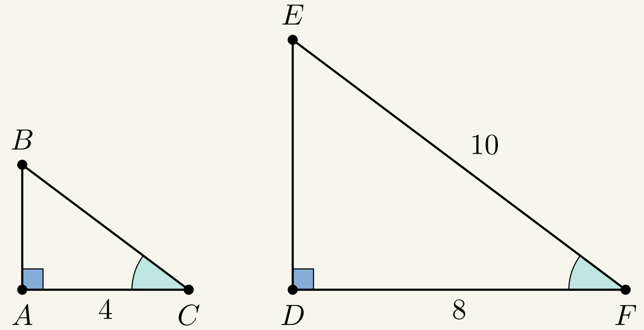
$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 36 + 9 = 45 \text{ e} \tag{1.2}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = 36 + 144 = 180. \tag{1.3}$$

Daí, $\overline{AB} = 3\sqrt{5}$ e $\overline{AC} = 6\sqrt{5}$.

Obs No Exercício 1.12 pode-se entrever a relação do Teorema de Pitágoras com as aplicações dos casos de semelhança de triângulos ao estudo do triângulo retângulo. De fato, o Teorema de Pitágoras é consequência desses casos de semelhança, como veremos oportunamente, e problemas envolvendo semelhança de triângulos muitas vezes fazem uso do Teorema de Pitágoras em sua solução, como é o caso do próximo exercício.

Exercício 1.13 Qual é a medida do segmento AB no triângulo menor da figura a seguir, dado que os triângulos são semelhantes?



(a) 1.
(b) 2.
(c) 3.

(d) 4.
(e) 5.

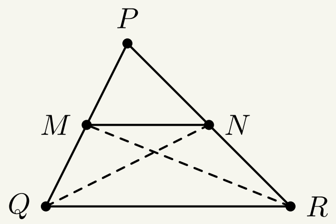
Solução. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo da direita, obtemos que $\overline{DE}^2 + 64 = 100$, ou seja, $\overline{DE}^2 = 100 - 64 = 36$. Assim, $\overline{DE} = 6$.

Note, agora, que os triângulos ABC e DEF são semelhantes, por terem dois pares de ângulos correspondentes iguais: os ângulos retos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ e os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{F}$, como vemos na figura anterior. Então,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Logo, $\overline{AB} = \overline{DE}/2 = 3$. ■

Exercício 1.14 Na figura abaixo, M e N são pontos médios dos lados PQ e PR do triângulo PQR. Sabendo que QR mede 18 cm, calcule a medida do segmento MN.



Solução. Primeiramente, uma vez que M e N são pontos médios dos lados PQ e PR, respectivamente, temos

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PQ}} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{PN}}{\overline{PR}} = \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{PR}}.$$

Agora, note que $\angle MPN$ e $\angle QPR$ são duas notações para um mesmo ângulo. Portanto, os triângulos MPN e QPR são semelhantes, com a correspondência natural de vértices, pelo caso LAL, com razão de semelhança $1/2$. Segue que

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{QR}} = \frac{1}{2}$$

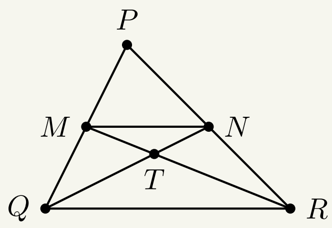
e, como $\overline{QR} = 18\,\text{cm}$, temos $\overline{MN} = 9\,\text{cm}$. ■

Obs A solução do exercício anterior mostrou que o segmento, que une os pontos médios de dois lados de um triângulo, tem medida igual à metade da medida do terceiro lado do triângulo. De fato, esse segmento também é paralelo ao terceiro lado; nas notações da figura acima, $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{QR}$. Isso porque a semelhança entre os triângulos PMN e PQR garante que $\angle PMN = \angle PQR$. Então, as retas $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{QR}$, sendo cortadas pela reta $\overleftrightarrow{PQ}$ segundo ângulos correspondentes iguais, devem ser paralelas.

O fato de que, em todo triângulo, o segmento que une os pontos médios de dois lados tem medida igual à metade do terceiro lado, sendo a ele paralelo, é mais um resultado de Geometria que deve ser incorporado a seu repertório de teoremas. Ele é conhecido como o *Teorema da Base Média.*

Exercício 1.15 (UFF) Na figura abaixo, M e N são pontos médios dos lados PQ e PR do triângulo PQR. Sabendo que QR mede 18,0 cm e que a altura do triângulo PQR, relativa a este lado, mede 12,0 cm, a altura do triângulo MNT, relativa ao lado MN, mede

(a) 4,0 cm.
(b) 3,5 cm.
(c) 3,0 cm.
(d) 2,0 cm.
(e) 1,5 cm.



Solução. Na solução do exercício anterior, vimos que os triângulos PMN e PQR são semelhantes, com razão de semelhança $1/2$. Também, na observação anterior vimos que as retas $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{QR}$ são paralelas.

Agora, note que os ângulos $\angle MTN$ e $\angle RTQ$ são opostos pelo vértice, logo, têm uma mesma medida. Por outro lado, os ângulos $\angle NMR$ e $\angle MRT$ são iguais, pois são ângulos *alternos internos* formados pelas retas paralelas $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{QR}$, com a transversal $\overleftrightarrow{MR}$, conforme a Figura 1.3.

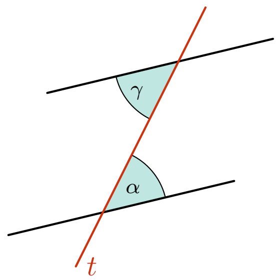


Figura 1.3: Uma reta transversal t corta duas retas paralelas determinando os ângulos α e γ. Esses ângulos são *alternos* porque estão em diferentes lados da reta transversal e são *internos* porque estão entre as retas paralelas. Sabe-se que ângulos alternos internos (assim como os alternos externos) são congruente.

Assim, os triângulos MTN e RTQ também são semelhantes, por terem dois pares de ângulos correspondentes iguais. A razão de semelhança entre eles é

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{QR}} = \frac{1}{2}.$$

Agora, é fato que, em dois triângulos semelhantes, *a razão entre os comprimentos das alturas baixadas a partir de vértices correspondentes é igual à razão de semelhança.* Essa afirmação requer uma justificativa, mas pode ser compreendida por meio das seguintes considerações. Inicialmente, lembramos que quando duas figuras são semelhantes, a distância entre pontos correspondentes nas figuras são proporcionais à razão de semelhança. Depois, observamos que expansões ou contrações, que transformam um triângulo em um triângulo semelhante, levam a altura do primeiro triângulo na altura do segundo, pois expansões ou contrações são apenas mudanças de escala, conforme o Exemplo 1. Assim, o comprimento H da altura do triângulo PMN, relativa ao lado MN, é a metade da altura do triângulo PQR, relativa ao lado QR. Como essa segunda altura mede 12,0cm, temos que $H = 6$cm.

A distância entre as retas paralelas $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{QR}$ então é igual a 6cm também. Contudo, veja que essa distância entre as paralelas é igual à soma das alturas dos triângulos MTN e RTQ, baixadas a partir do vértice comum T. Por outro lado, se h é a altura do triângulo MTN, então a altura do triângulo RTQ é igual a $2h$. Aqui, estamos utilizando novamente a discussão do parágrafo anterior: a razão de semelhança entre essas duas alturas é igual à razão de semelhança entre os triângulos, que é $1/2$, como vimos anteriormente. Logo, $h + 2h = 6$, ou seja, $h = 2$cm. A alternativa correta é a da letra (d).

Exercício 1.16 Um professor enuncia o seguinte teorema: "qualquer triângulo pode ser dividido em p triângulos semelhantes, com $p > 1$, de tal modo que triângulos adjacentes têm exatamente um lado comum ou um vértice comum". Qual é o menor valor de p, maior que 1, para o qual o teorema do professor é verdadeiro?

(a) 2.
(b) 3.

(c) 4.
(d) 6.
(e) 8.

Solução. Na Figura 1.4, sejam D, E e F os pontos médios de AB, AC e BC respectivamente. Observe que os triângulos ADE, FEA, EFC e DBF são quatro triângulos congruentes, logo semelhantes, que dividem ABC satisfazendo as condições da questão.

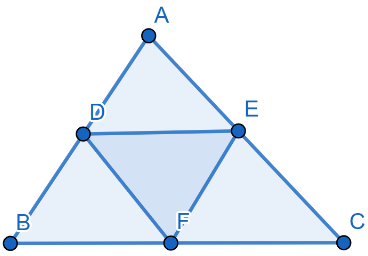


Figura 1.4: quatro triângulos congruentes.

Suponha que podemos dividir ABC em dois triângulos conforme o enunciado da questão. Nesse caso, necessariamente temos a situação esboçada na Figura 1.5.

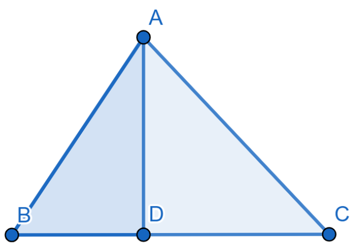


Figura 1.5

Considere o caso em que o triângulo ABC seja acutângulo – os seus ângulos são agudos – e escaleno – os seus lados são, dois a dois, distintos. Se $\angle ADB > \angle ADC$ então $\angle ADB$ é obtuso e $\angle ADC$ é agudo pois a soma desses ângulos é igual a 180 graus. Assim, o triângulo ADB é obtusângulo e o triângulo ADC é acutângulo, logo não podem ser semelhantes. Então, $\angle ADB = \angle ADC = 90°$. Assim, para que os triângulos ADB e ADC sejam semelhantes, temos que ou $\angle BAD = \angle CAD$ ou $\angle BAD = \angle ACD$. No primeiro caso, o triângulo ABC é isósceles, contradizendo a hipótese de ele ser escaleno. No segundo caso, $\angle BAD + \angle DAC = 90°$, logo BAC é um triângulo retângulo, o que é um absurdo. Assim, não podemos dividir ABC em dois triângulos conforme o enunciado da questão.

Suponha, agora, que podemos dividir ABC em três triângulos conforme o enunciado da questão. Então, uma das situações dentre as esboçadas nas figuras 1.6, 1.7 e 1.8 deve ocorrer.

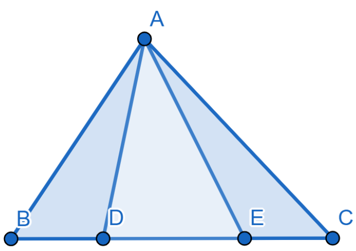


Figura 1.6

Considere o caso em que o triângulo ABC, na Figura 1.6, seja acutângulo. Observe, então, que um dos triângulos ABD, ADE e AEC é obtusângulo, enquanto um dos outros dois não é. Logo, esse triângulo que é obtusângulo e o que não é, formam um par de triângulos não semelhantes.

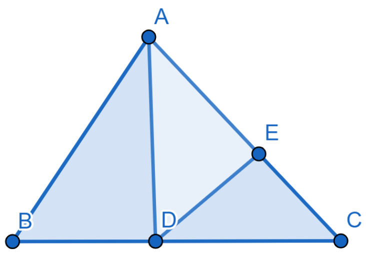


Figura 1.7

Na Figura 1.7, o triângulo ABC é dividido nos triângulos ABD, DEA e DEC. Se o triângulo ADB é obtusângulo, então o triângulo ADC é acutângulo. Conforme vimos na análise da Figura 1.5, isso implica que ambos os triângulos DEA e DEC são retângulos, logo não podem ser semelhantes ao triângulo ADB. Se o triângulo ADB é acutângulo, ele não pode ser semelhante a ambos os triângulos DEA ou DEC pois pelo menos um desses triângulos têm ângulo reto ou obtuso no vértice E. Assim, ADB é retângulo com ângulo reto no vértice B.

Nessa situação, para que os triângulos ADE e DEC sejam semelhantes, é preciso que os ângulos $\angle DEC$ e $\angle DEA$ sejam ambos retos, conforme vimos na análise da Figura 1.5.

Por hipótese, ABC não é isósceles, logo $\angle ABD \neq \angle ACD$. Por conseguinte, a hipótese da semelhança entre os triângulos ADB, AED e DEC implica que

$$\angle ABD = \angle EDC = \angle EAD.$$

Assim, $\angle DAE + \angle BAD = \angle ABD + \angle BAD = 90$, ou seja, ABC é retângulo em A. Logo o triângulo ABC não pode ser escaleno acutângulo.

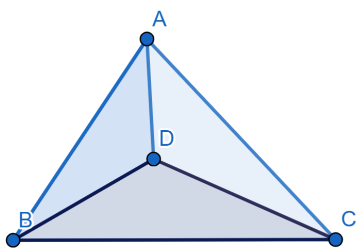


Figura 1.8

Como nos outros casos analisados, suponha ABC escaleno acutângulo na Figura 5. Como um dos três triângulos ADB, ADC e BDA é obtusângulo no vértice D, os três triângulos são obtusos nesse vértice. Seja AD o menor dentre AD, DB e DA. Assim, a hipótese dos triângulos ADB, ADC e BDA serem semelhantes implica que $AD/AB = AD/BC$, ou seja, que $AB = AC$, pois essas razões são o quociente do menor lado que compõe o ângulo obtuso pelo lado oposto ao ângulo obtuso nos triângulos ADB e ADC. Então o triângulo ABC é isósceles, uma contradição.

1.6 – Exercícios Propostos

Nível 1

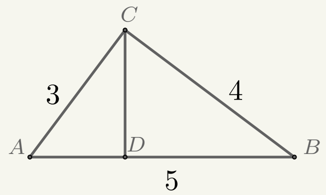
Exercício 1.17 Assinale V (verdadeiro) ou F (falso).

(a) ( ) Dois triângulos equiláteros são necessariamente semelhantes.
(b) ( ) Dois triângulos isósceles são necessariamente semelhantes.
(c) ( ) Dois triângulos retângulos são necessariamente semelhantes.

(d) ( ) Dois triângulos retângulos isósceles são necessariamente semelhantes.
(e) ( ) Dois losangos são necessariamente semelhantes.

Exercício 1.18 O triângulo ABC é retângulo com ângulo reto no vértice C. Sabendo que o segmento CD é perpendicular ao lado AB, determine o comprimento de CD. São dados $AB = 5$, $BC = 4$ e $AC = 3$.

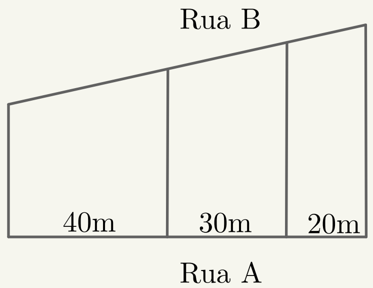
(a) 1,0.
(b) 1,2.
(c) 2,4.
(d) 2,8.
(e) 3,2.



Exercício 1.19 Calcule o comprimento dos segmentos AD e DB, traçados no triângulo descrito no exercício 1.18.

Exercício 1.20 (FUVEST-SP, adaptada) Três terrenos têm frentes para a Rua A e para a Rua B, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à Rua A. Qual é a medida de frente para a Rua B, em metros, do lote do meio, sabendo que a frente total para essa rua tem 180 metros?

(a) 40.
(b) 50.
(c) 60.
(d) 70.
(e) 80.



Exercício 1.21 Dois retângulos são semelhantes. O primeiro deles mede 10 centímetros de largura por 8 centímetros de comprimento e o segundo mede 20 centímetros de largura por 16 centímetros de comprimento. Qual é a razão de semelhança entre a área do retângulo maior e a área do retângulo menor?

(a) 1.
(b) 2.
(c) 3.
(d) 4.
(e) 5.

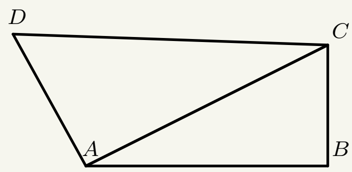
Exercício 1.22 (CPAEAM - 2019) Os lados de um triângulo medem 30, 70 e 80 centímetros. Ao traçarmos a altura desse triângulo em relação ao maior lado, dividiremos esse lado em dois segmentos. Qual é o valor do menor segmento em centímetros?

(a) 15.
(b) 14.

(c) 13.
(d) 12.
(e) 11.

Exercício 1.23 (FUVEST-SP) A sombra de um poste vertical, projetada pelo sol sobre um chão plano, mede 12 metros. Nesse mesmo instante, a sombra, de um bastão vertical de 1 metro de altura mede 0,6 metro. Qual é a altura do poste?

Exercício 1.24 Os triângulos ABC e CAD na figura abaixo são semelhantes.

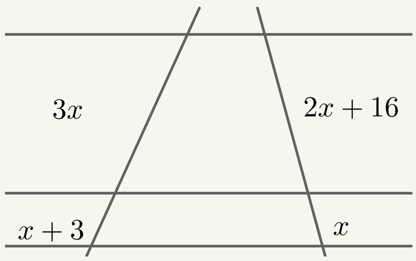


Sabe-se que o ângulo $\hat{B}$ mede $90°$, que $AC = 5$ e $AB = 4$. Qual é a medida de CD?

(a) 5,25.
(b) 5,5.
(c) 5,75.
(d) 6,25.
(e) 6,5.

Exercício 1.25 Determine o valor de x na figura abaixo, que traz três retas paralelas e duas retas transversais.

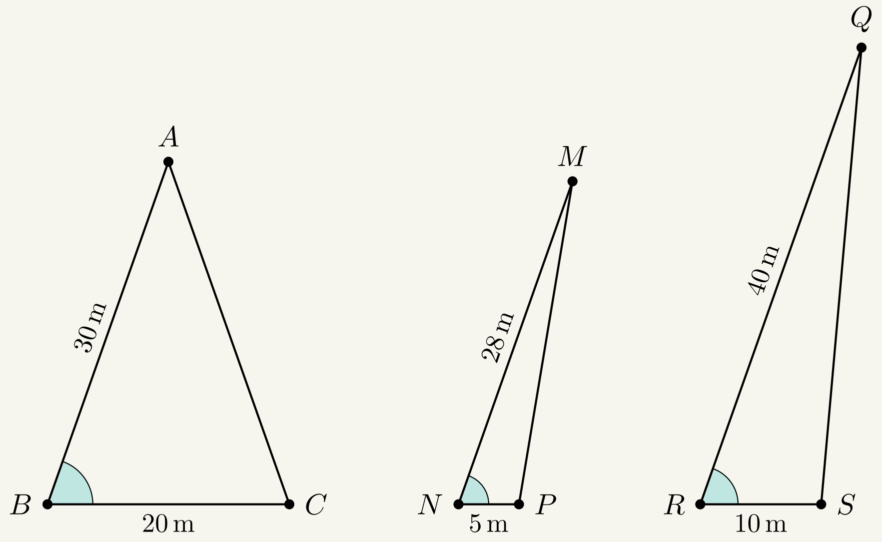
(a) 10.
(b) 18.
(c) 24.
(d) 30.
(e) 36.



Exercício 1.26 (Cesgranrio) Certa noite, uma moça de 1,50 m de altura estava a dois metros de distância de um poste de luz de 4 m de altura. O comprimento da sombra da moça no chão era de

(a) 0,75 m.
(b) 1,20 m.
(c) 1,80 m.
(d) 2,40 m.
(e) 3,20 m.

Exercício 1.27 Nos triângulos da figura, os ângulos marcados têm medidas iguais. Assinale a alternativa correta.



(a) Os triângulos ABC e MNP são semelhantes.
(b) Os triângulos ABC e QRS são semelhantes.
(c) Os triângulos MNP e QRS são semelhantes.
(d) Os triângulos ABC, MNP e QRS são semelhantes.
(e) Nenhum triângulo é semelhante a qualquer outro.

Exercício 1.28 Com o objetivo de descobrir a altura de uma construção, João mediu a sombra do edifício e, logo após, mediu sua própria sombra. A sombra da construção tinha 8 metros e a de João, que tem 1,7 metros de altura, media 0,2 metros. Qual é a altura da construção?

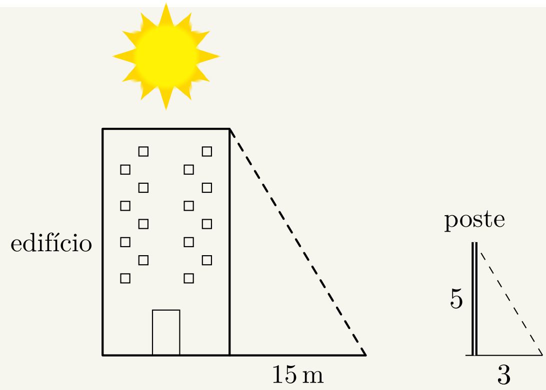
(a) 56 m.
(b) 68 m.
(c) 144 m.
(d) 40 m.
(e) 30 m.

Exercício 1.29 (Escola de Aprendizes de Marinheiro - 2017) Um prédio projeta no solo uma sombra de 30 m de extensão no mesmo instante em que uma pessoa de 1,80 m projeta uma sombra de 2,0 m. Pode-se afirmar que a altura do prédio vale

(a) 27 m.
(b) 30 m.
(c) 33 m.
(d) 36 m.
(e) 40 m.

Exercício 1.30 (Unesp) A sombra de um prédio, em um terreno plano, em uma determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura 5 m mede 3 m. A altura do prédio, em metros, é

(a) 25 m.
(b) 29 m.
(c) 30 m.
(d) 45 m.
(e) 75 m.



Nível 2

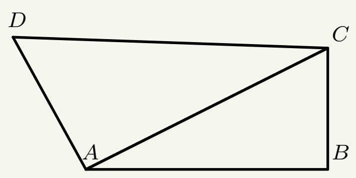
Exercício 1.31 Assinale V (verdadeiro) ou F (falso).

(a) ( ) Se F_1, F_2 e F_3 são figuras planas tais que F_1 é semelhante a F_2 e F_2 é semelhante a F_3, então F_1 é semelhante a F_3.
(b) ( ) Se F e F' são duas figuras semelhantes pela correspondência que leva, respectivamente, A, $B \in F$ a A', $B' \in F'$ e $AB = A'B'$, então as figuras F e F' são congruentes.
(c) ( ) Se um segmento divide um triângulo T em dois triângulos semelhantes T_1 e T_2, então os triângulos são congruentes.
(d) ( ) Se um segmento divide um triângulo retângulo T em dois triângulos semelhantes T_1 e T_2, então os triângulos são congruentes.
(e) ( ) Se um segmento divide um triângulo isósceles T em dois triângulos semelhantes T_1 e T_2, então os triângulos são congruentes.

Exercício 1.32 Um segmento divide um triângulo T em dois triângulos semelhantes T_1 e T_2. Assinale a opção com o valor máximo que o ângulo interno de T_1 e T_2 pode ter.

(a) 45°.
(b) 60°.
(c) 90°.
(d) 120°.
(e) 135°.

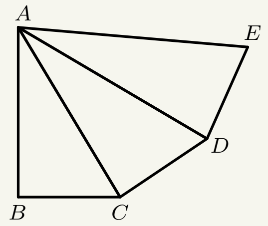
Exercício 1.33 Os triângulos ABC e CAD na figura abaixo são semelhantes.



Sabe-se que as áreas dos triângulos ABC e CAB medem $24\,\text{cm}^2$ e $37{,}5\,\text{cm}^2$, respectivamente, e que $AC = 5\,\text{cm}$. Qual é a medida de CD em centímetro?

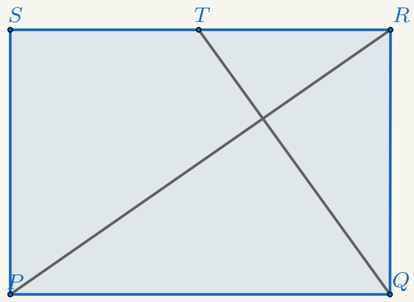
(a) 10,5.
(b) 11.
(c) 11,5.
(d) 12,5.
(e) 13.

Exercício 1.34 Na figura abaixo os triângulos ABC, ACD e ADE são semelhantes. Se $AC/AB = 5/4$, qual é o valor de AE/AC?



.

Exercício 1.35 Diga quantos triângulos semelhantes ocorrem na figura abaixo, sabendo que $PQRS$ é um retângulo e $RS = 2RT$.



Exercício 1.36 (CPACN-2019) O perímetro do triângulo ABC mede x unidades. O triângulo DEF é semelhante ao triângulo ABC e sua área é 36 vezes a área do Triângulo ABC. Nessas condições, é correto afirmar que a área do triângulo DEF é

(A) $2x$.
(B) $3x$.
(C) $6x$.
(D) $9x$.
(E) $10x$.

Exercício 1.37 A rampa de um hospital tem, na sua parte mais elevada, 2,2 metros de altura. Um paciente, ao caminhar sobre a rampa, percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é

(a) 1,16 metros.
(b) 3,00 metros.
(c) 5,40 metros.
(d) 5,60 metros.
(e) 7,04 metros.

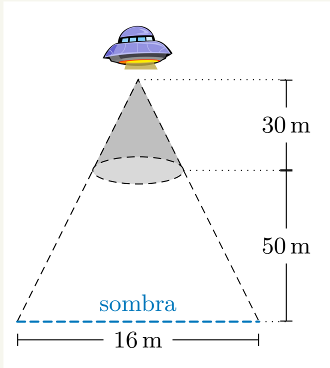
Exercício 1.38 Tales de Mileto, ao ser desafiado a medir a altura da Grande Pirâmide de Quéops, poderia recorrer ao seguinte método: na tarde de um certo dia, ele marcaria no chão dois pontos P_1 e P_2 correspondentes à sombra do topo da pirâmide em horários diferentes. Ao mesmo tempo, marcaria os pontos p_1 e p_2 em que a extremidade de um bastão vertical, de um metro, faz sombra no chão. No tempo de Tales, a grande pirâmide tinha cerca de 146 metros de altura. Qual seria a distância de P_1 a P_2, medida por Tales, se a distância de p_1 a p_2 fosse 15 centímetros?

(a) Cerca de 1,46 metros.

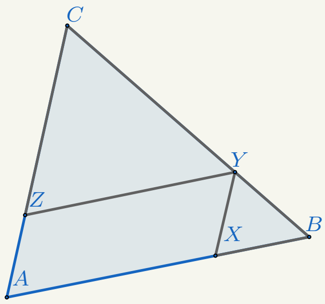
(b) Cerca de 14,6 metros.
(c) Cerca de 2,19 metros.
(d) Cerca de 22 metros.
(e) Cerca de 3 metros.

Exercício 1.39 (UNIRIO-adaptada) Numa cidade do interior, surgiu à noite um objeto voador não identificado, em forma de disco plano, que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um disco voador, situado a aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura abaixo. Pode-se afirmar que o raio do disco plano mede, em metros, aproximadamente

(a) 3,0.
(b) 3,5.
(c) 4,0.
(d) 4,5.
(e) 5,0.



Exercício 1.40 (CPAEAM, 2018, Prova Amarela, Questão 26) Analise a figura a seguir.

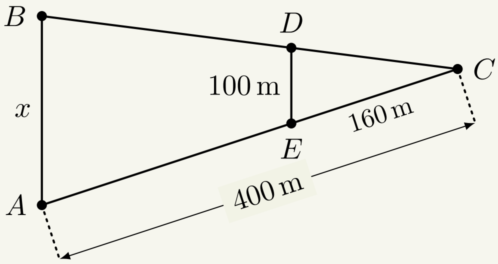


Na figura acima, $AB = AC$, $BX = BY$ e $CZ = CY$. Se o ângulo A mede 40°, então o ângulo XYZ mede

(a) 40°.
(b) 50°.
(c) 60°.
(d) 70°.
(e) 90°.

Exercício 1.41 Na figura abaixo, os segmentos BA e DE são paralelos. Se $\overline{AC} = 400\,\text{m}$ e $\overline{CE} = 160\,\text{m}$, qual é o valor de x?

(a) 144 m.
(b) 250 m.
(c) 225 m.
(d) 275 m.
(e) 370 m.



CIENTISTA CHEFE EDUCAÇÃO
FUNCAP
MAISPAIC
PACTO PELA APRENDIZAGEM

Exercício 1.42 Qual é a razão de semelhança entre dois polígonos semelhantes, cujas áreas medem $36\,\text{cm}^2$ e $25\,\text{cm}^2$, respectivamente?

(a) 1,0.
(b) 1,1.
(c) 1,2.
(d) 1,3.
(e) 1,4.

Exercício 1.43 Dados dois polígonos semelhantes, assinale a opção que traz a área do menor, sabendo que a área do maior é igual a $64\,\text{cm}^2$ e que a razão de semelhança entre eles é de 0,5.

(a) $32\,\text{cm}^2$.
(b) $16\,\text{cm}^2$.
(c) $8\,\text{cm}^2$.
(d) $4\,\text{cm}^2$.
(e) $2\,\text{cm}^2$.

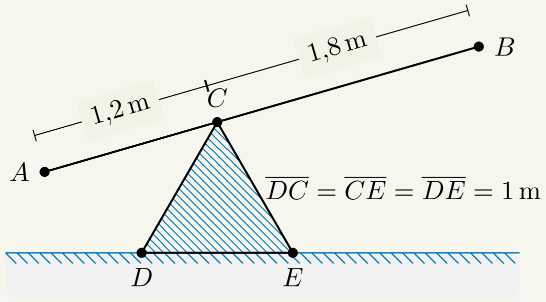
Nível 3

Exercício 1.44 (ENA-Profmat-2019, Questão 8) A hipotenusa de um triangulo retângulo isósceles T_1, cujos catetos medem l, é o cateto de um triângulo retângulo isósceles T_2. A hipotenusa de T_2 é o cateto de um triângulo retângulo isósceles T_3, cuja hipotenusa é o cateto do triangulo retângulo isósceles T_4 e assim por diante. O valor de l, que torna a medida da hipotenusa de T_{100} igual a 2^{50}, é

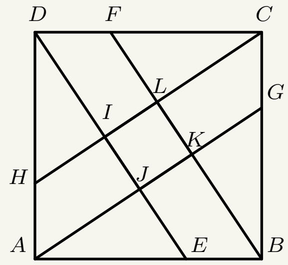
(a) $\sqrt{2}$.
(b) 1.
(c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(d) 2.
(e) $2\sqrt{2}$.

Exercício 1.45 (Unesp) Uma gangorra é formada por uma haste rígida AB, apoiada sobre uma mureta de concreto no ponto C, como mostrado na figura. Quando a extremidade B da haste toca o chão, a altura da extremidade A em relação ao chão é de

(a) $\sqrt{3}\,\text{m}$.
(b) $\frac{3}{\sqrt{3}}\,\text{m}$.
(c) $\frac{6\sqrt{3}}{5}\,\text{m}$.
(d) $\frac{5\sqrt{3}}{6}\,\text{m}$.
(e) $2\sqrt{2}\,\text{m}$.

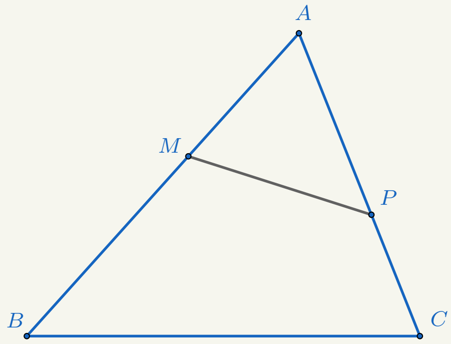


Exercício 1.46 (ENA, PROFMAT, 2019, Questão 15) Na figura, $ABCD$ é um quadrado. Além disso, AG é paralelo a CH, BF é paralelo a DE, $FC = 2DF$ e $DH = 2AH$. A área do quadrilátero $IJKL$, que possui como vertices os pontos de interseção dos segmentos AG, CH, BF e DE, representa que fração da área do quadrado $ABCD$?



(a) 144 m.
(b) 250 m.
(c) 225 m.
(d) 275 m.
(e) 370 m.

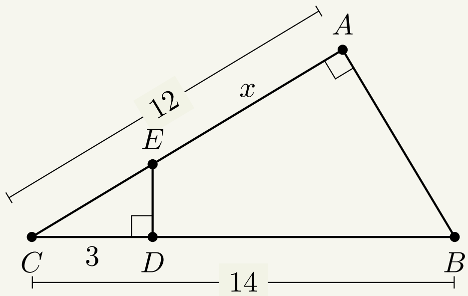
Exercício 1.47 Os triangulos ABC e AMP, da figura abaixo, são semelhantes e os lados MP e BC não são paralelos.



É sempre correto afirmar que

(a) os triângulos ABC e BPC são semelhantes.
(b) os triângulos BPC e BMP são semelhantes.
(c) os ângulos AMP e ABP são suplementares.
(d) os ângulos ABC e MPC são suplementares.
(e) os ângulos MPB e MBP são congruentes.

Exercício 1.48 Em relação à figura a seguir, assinale a opção que traz o valor de x.



(a) 5,0.
(b) 8,5.
(c) 10,0.
(d) 12,0.
(e) 15,0.

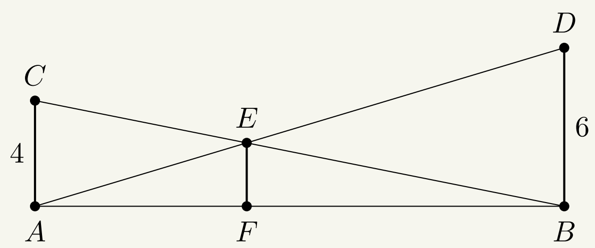
Exercício 1.49 (Colégio Militar - RJ - 2015) Em um triângulo ABC, os pontos D e E pertencem, respectivamente, aos lados AB e AC e são tais que os segmentos DE e BC são paralelos. Se F é um ponto de AB tal que EF é paralelo a CD e as medidas de AF e FD são, respectivamente, 4 e 6, a medida do segmento DB é

(a) 15.
(b) 10.
(c) 20.
(d) 16.
(e) 36.

Exercício 1.50 (Unicamp) Uma rampa de inclinação constante, como a que dá acesso ao Palácio do Planalto, em Brasília, tem 4 metros de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, tendo começado a subi-la, nota que, após caminhar 12,3 metros sobre a rampa, está a 1,5 metros de altura em relação ao solo.

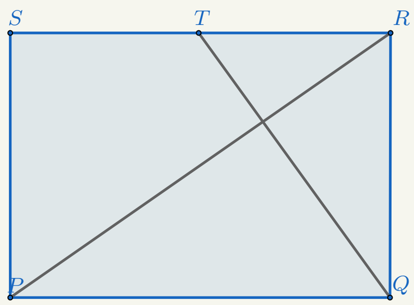
a) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.
b) Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa.

Exercício 1.51 (Enem - 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes, de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real, na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados. Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?



(a) 1,0 m.
(b) 2,0 m.
(c) 2,4 m.
(d) 3,0 m.
(e) 3,3 m.

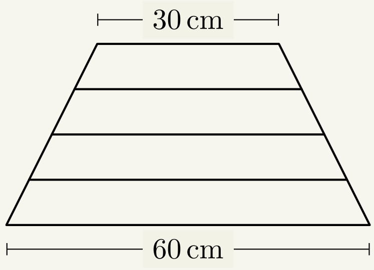
Exercício 1.52 (Canguru 2014 - Nível S - Questão 22) Na figura, T é o ponto médio do lado RS do retângulo PQRS. O segmento QT é perpendicular à diagonal PR. Qual é a razão $PQ : QR$?



(a) $2 : 1$.
(b) $\sqrt{3} : 1$.
(c) $3 : 2$.
(d) $5 : 4$.
(e) $\sqrt{2} : 1$.

Exercício 1.53 (ENEM) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme mostrado na figura. Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em centímetros, deve ser

(a) 144.
(b) 180.
(c) 210.
(d) 225.
(e) 240.



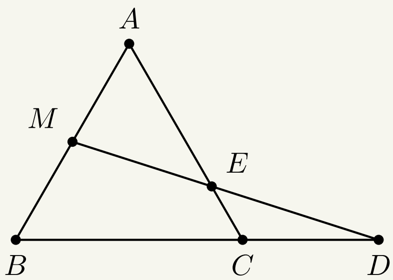
Exercício 1.54 (ENA-PROFMAT-2016-Questão 36) O ponto P é marcado sobre o lado BC de um triângulo ABC, e, a partir dele, são traçados os segmentos PM e PN, paralelos aos lados AC e AB respectivamente, com $M \in AB$ e $N \in AC$. Sabendo que $BC = 4$ e que a área do paralelogramo $AMPN$ é igual a 3/8 da área do triângulo ABC, o maior valor possível para a medida de BP é igual a

(A) 1.
(B) $\sqrt{2}$.
(C) 2.
(D) $\sqrt{6}$.
(E) 3.

Nível 4

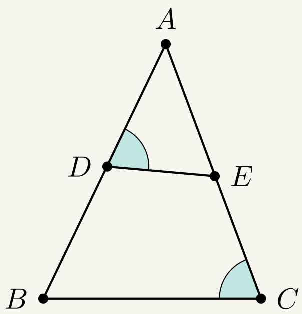
Exercício 1.55 (MACK-SP) O triangulo ABC da figura é equilátero. Se $AM = MB = 5$ e $CD = 6$, o valor de AE vale

(a) 76/11.
(b) 77/11.
(c) 78/11.
(d) 79/11.
(e) 80/11.



Exercício 1.56 (Puccamp) Os triângulos ABC e AED, representados na figura abaixo, são semelhantes, sendo o ângulo ADE congruente ao ângulo ACB. Se $BC = 16$ cm, $AC = 20$ cm, $AD = 10$ cm e $AE = 10{,}4$ cm, o perímetro do quadrilátero $BCED$, em centímetros, é igual a

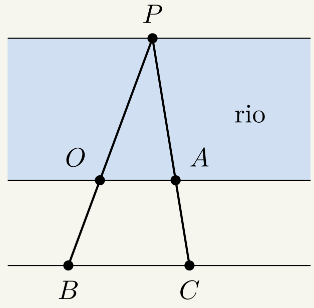
(a) 32,6.
(b) 36,4.
(c) 40,8.
(d) 42,6.
(e) 44,4.



Exercício 1.57 (ENA-PROFMAT-2016-Questão 26) ABC é um triângulo tal que $AB = 6$ e $BC = 9$. Seja P um ponto sobre o lado BC com $BP = 4$. Sabendo que $P\hat{A}B = x$ e $P\hat{A}C = y$, a medida do ângulo $B\hat{P}A$ é igual a

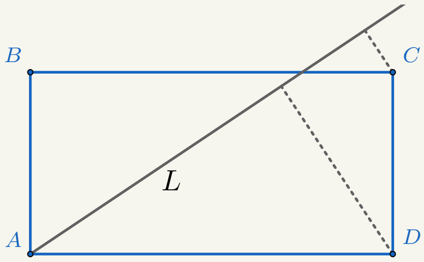
(A) $x + y$.
(B) $x - y$.
(C) $2x - y$.
(D) $2x + y$.
(E) $x + 2y$.

Exercício 1.58 (Unesp) Um observador situado num ponto O, localizado na margem de um rio, precisa calcular sua distância até um ponto P, localizado na outra margem, sem atravessar o rio. Para isso ele marca, com estacas, outros pontos A, B e C do lado da margem em que se encontra, de tal forma que P, O e B estão alinhados entre si e P, A e C também. Além disso, OA é paralelo a BC, $OA = 25\,\text{m}$, $BC = 40\,\text{m}$ e $OB = 30\,\text{m}$, conforme mostrado na figura abaixo. A distância, em metros, do observador em O até o ponto P, é



(a) 30.
(b) 35.
(c) 40.
(d) 45.
(e) 50.

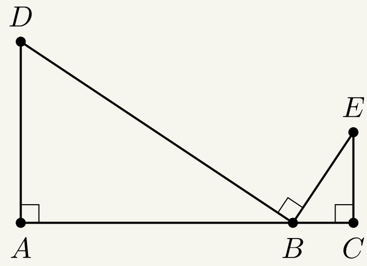
Exercício 1.59 (Canguru 2014, Nível S, Questão 19) Uma reta L passa pelo vértice A de um retângulo $ABCD$. A distância do ponto C à reta L é igual a 2 e a distância do ponto D à reta L é igual à 6. Se $AD = 2AB$, qual é o valor de AD.



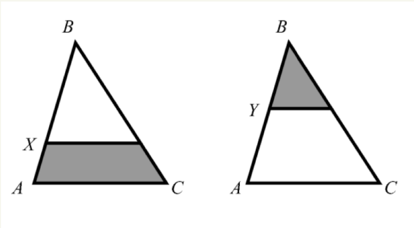
(A) 10.
(B) 12.
(C) 14.
(D) 16.
(E) $4\sqrt{3}$.

Exercício 1.60 (Unesp) Na figura abaixo, B é um ponto do segmento de reta AC e os ângulos DAB, DBE e BCE são retos. Se $AD = 6\,\text{dm}$, $AC = 11\,\text{dm}$ e $EC = 3\,\text{dm}$, as possíveis medidas de AB, em dm, são

(a) 6,5 e 4,5.
(b) 7,5 e 3,5.
(c) 8,0 e 3,0.
(d) 7,0 e 4,0.
(e) 9,0 e 2,0.



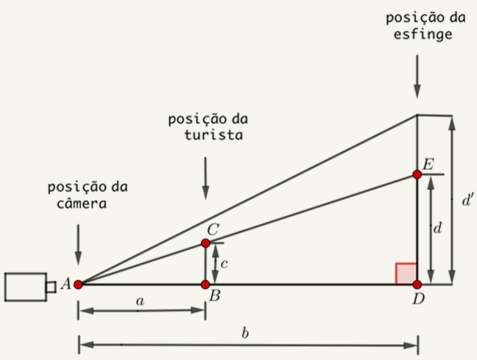
Exercício 1.61 (Canguru 2015, Nível J, Questão 24) No triângulo ABC, podemos traçar as paralelas à base AC, pelos pontos X e Y, tal que as áreas das regiões cinzentas sejam iguais. Se a razão $BX : XA$ é igual a $4 : 1$, então qual é a razão $BY : YA$?



(a) $1 : 1$.
(b) $2 : 1$.
(c) $3 : 1$.
(d) $3 : 2$.
(e) $4 : 3$.

Exercício 1.62 (ENEM) A fotografia mostra uma turista aparentemente beijando a esfinge de Gizé, no Egito. A figura à sua direita mostra como, na verdade, foram posicionadas a câmera fotográfica, a turista e a esfinge. Medindo-se com uma régua diretamente na fotografia, verifica-se que a medida do queixo até o alto da cabeça da turista é igual a $2/3$ da medida do queixo da esfinge até o alto da sua cabeça. Considere que essas medidas na realidade são representadas por d e d', respectivamente, que a distância da esfinge à lente da câmera fotográfica, localizada no plano horizontal do queixo da turista e da esfinge, é representada por b e que a distância da turista à mesma lente é representada por a, pergunta-se: qual é a razão entre b e a?


Fotografia obtida da internet.



(a) $b/a = d'/c$.
(b) $b/a = 2d/3c$.
(c) $b/a = 3d'/2c$.
(d) $b/a = 2d'/3c$.
(e) $b/a = 2d'/c$.

CIENTISTA CHEFE EDUCAÇÃO
FUNCAP
MAISPAIC
PACTO PELA APRENDIZAGEM

Exercício 1.63 (Maio 2000) Seja ABC um triângulo retângulo em A e tal que $AC = 1$. A bissetriz do ângulo $\angle BAC$ corta a hipotenusa em R. A reta perpendicular à reta AR, passando por R, corta AB em seu ponto médio. Qual é a medida do lado AB?

Exercício 1.64 (Maio 1996) Um terreno $ABCD$ tem a forma de trapézio retangular, sendo AB a base menor. O ângulo $\hat{A}$ é reto, AB mede 30 metros, AD mede 20 metros e DC mede 45 metros. Este terreno deve ser dividido em duas partes de mesma área traçando uma paralela ao lado AD. A qual distância de D devemos traçar a paralela?

Exercício 1.65 Uma reta, passando pelo vértice A do quadrado $ABCD$, intersecta o lado CD em E e a semirreta $\overrightarrow{BC}$ em F. Prove que

$$\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2}.$$

Exercício 1.66 Um ponto E é escolhido no interior do lado AC de um triângulo ABC. São escolhidos pontos D e F sobre AB e BC, respectivamente, de modo que DE é paralelo a BC e EF é paralelo a AB. Prove que

$$[BDEF] = \sqrt{[ADE][EFG]},$$

onde $[BDEF]$, $[ADE]$ e $[EFG]$ denotam as áreas do quadrilátero $BDEF$ e dos triânguloas ADE e EFG, respectivamente.